ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ЦИФРОВОЙ ИНЖИНИРИНГ
ПИШ СПбПУ

Ю. Я. Болдырев
Е. Р. Мартынец
Л. А. Щербина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЦИФРОВОЙ ИНЖИНИРИНГ

Учебное пособие

ПОЛИТЕХ-ПРЕСС
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Передовая инженерная школа «Цифровой инжиниринг»
Высшая школа передовых цифровых технологий

Ю. Я. Болдырев Е. Р. Мартынец Л. А. Щербина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЦИФРОВОЙ ИНЖИНИРИНГ

Учебное пособие

ПОЛИТЕХ-ПРЕСС
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Санкт-Петербург
2025

ББК 22.1я73
Б79

Р е ц е н з е н т ы:
Доктор технических наук, доцент,
профессор Высшей школы гидротехнического и энергетического строительства
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого
В. Л. Баденко
Кандидат технических наук, доцент,
доцент Высшей школы механики и процессов управления
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого
А. А. Суханов

Болдырев Ю. Я. **Математическое моделирование и цифровой инжиниринг** : учеб. пособие / Ю. Я. Болдырев, Е. Р. Мартынец, Л. А. Щербина. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2025. – 240 с.

Соответствует содержанию разделов ряда дисциплин направлений подготовки «Прикладная механика» уровня бакалавриата (15.03.03) и магистратуры (15.04.03), а также ряда дисциплин других направлений.

Рассмотрены вопросы формирования и развития основополагающих понятий «математическое моделирование» и «цифровой инжиниринг». При этом в центре внимания находятся фундаментальная значимость универсальной методологии математического моделирования как центрального инструмента изучения человеком мира природы, приобретшего в последние десятилетия черты завершенной концепции. Также рассмотрена ретроспектива развития инжиниринга. Прослеживается история его становления от Античности к нашему времени.

Вместе с тем главное внимание уделяется становлению связи между математическим моделированием и инжинирингом и трансформации инжиниринга в цифровой инжиниринг во второй половине XX века. Изложение построено таким образом, чтобы показать формирование в течение всей научной активности человеческого общества уникального инструментария математического моделирования и его превращение в последние десятилетия в основной инструмент проектирования и инженерного анализа.

Учебное пособие предназначено для преподавателей, научных сотрудников, аспирантов и студентов высшей технической школы, а также для всех заинтересованных в изучении истории развития естественных наук.

Табл. 3. Ил. 21. Библиогр.: 39 назв.

Печатается по решению
Совета по издательской деятельности Ученого совета
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

ISBN 978-5-7422-9185-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга является итогом многолетнего опыта применения одним из авторов математического моделирования для решения инженерных задач, главным образом в области оптимизации, и итогом длительного изучения роли компьютерных технологий в промышленных приложениях двумя другими авторами.

Книга, рожденная в итоге длительных и плодотворных дискуссий по проблемам Математического моделирования и Цифрового инжиниринга, отражает преимущественно взгляды авторов. Безусловно, большую роль в формировании этих взглядов оказало творческое взаимодействие с руководителем Передовой инженерной школы «Цифровой инжиниринг» профессором А.И. Боровковым, которому авторы выражают искреннюю благодарность.

Готовя рукопись книги, авторы руководствовались тем подходом, который всегда был важнейшей чертой Политехнического института Петра Великого (сегодня – университета) с момента его основания. Существо этого подхода заключается в опоре инженерного образования на фундаментальные естественнонаучные знания.

И такой подход является, по нашему мнению, крайне важным, поскольку позволяет посмотреть на рассматриваемые в работе вопросы максимально глубоко, точно описать основные термины, понятия и дать корректные определения.

В работе предпринята попытка полного и корректного описания технологий Математического моделирования, используемых на протяжении многих веков, которые только во второй половине прошлого века приняли характер завершенной Концепции и стали универсальной методологией описания явлений Природы и всех объектов, систем и технологий, созданных человеком.

Эти технологии рассматриваются нами с позиций важнейшей области их применения – области промышленности. Цифровые технологии, или технологии применения компьютеров, построенные на основе математического моделирования, привели к формированию охватывающей все сферы промышленности поистине необъятной области цифрового инжиниринга.

Цифровой инжиниринг – это вторая область передовых направлений научно-технической сферы, рассматриваемая в работе, которая сформировалась во второй половине прошлого века, хотя сам инжиниринг также имеет очень долгую историю.

Особо подчеркнем, что мы считаем необходимым рассмотрение затрагиваемых вопросов в ретроспективном аспекте, поскольку именно такой взгляд позволяет посмотреть на эти вопросы в их развитии и максимально полно. Также отметим, что мы посчитали необходимым привести в нашей работе словарь важнейших терминов и определений, используемых в работе.

Авторы благодарны своим учителям и товарищам по Санкт-Петербургскому политехническому университету Петра Великого, коллегам по цеху компьютерных и суперкомпьютерных технологий и их приложений, за обсуждение содержания книги и многих вопросов, затронутых в ней, а также характера изложения материала с тем, чтобы книга была полезна, доступна и интересна читателю.

Формулы и рисунки имеют сквозную нумерацию в рамках каждого из разделов. Список используемых источников приведен в конце книги.

1 ВВОДНЫЙ РАЗДЕЛ

Цифровые технологии все более и более охватывают все стороны жизни человеческого сообщества. При этом подавляющее большинство людей видят только самый верхний, буквально «бытовой» слой внедрения таких технологий, тогда как важнейшие аспекты этих технологий остаются вне поля внимания к пониманию их роли. И это касается даже представителей научно-технического сообщества. Какие же это аспекты? Конечно, в первую очередь, они связаны с теми сферами, которые движут самим развитием нашей цивилизации, а это сферы науки и производства. И здесь цифровые технологии занимают все новые и новые области и сегменты деятельности человеческого сообщества.

Но прежде, чем раскрывать, что это за области, попробуем определить, а что же мы понимаем под цифровыми технологиями. Заметим, не под компьютерными, а именно под ***цифровыми технологиями***, и в нашем понимании эта разница, которая часто не просматривается даже специалистами, весьма существенна, на чем мы тоже остановимся далее. Попытка дать всеобъемлющее определение цифровых технологий может нас завести довольно далеко, вплоть до морально-этических и правовых отношений. По этой причине мы попытаемся определить цифровые технологии, в первую очередь, в рамках обозначенных в наименовании нашей книги сфер, связанных с научно-технической и производственной деятельностью. При этом попытка дать такое определение, опираясь на предложения интернета, дает, например, такое определение: ***Цифровые технологии*** – это ***технологии, позволяющие создавать, хранить, обрабатывать и распространять данные в электронном виде с использованием компьютера и компьютерных сетей (в частности, через Интернет).***

Почему нас не может полностью удовлетворить такое определение?

Потому что оно ставит в один ряд такие принципиально разные по своему существу и значимости процессы, как создание и обработка информации (данных), и важные, но все же вторичные аспекты – хранение и распространение данных, рассматривая их в одном ряду с созданием информации (данных). При этом не раскрывается основополагающее существо важнейших процессов создания информации (данных).

Но не нужно иметь очень глубоких знаний, чтобы понять, что «создание данных» основывается на инструментарии математического знания – основе основ всего систематического научного знания. Действительно, науку и инженерное дело цифры интересуют как итог рассмотрения содержательных математических моделей явлений Природы и инженерного анализа. И источником этих цифр могут быть только названные математические модели. По этим причинам мы предлагаем рассматривать ***Цифровые технологии как совокупность (система) технологий, на основе которых математические модели явлений Природы, любого рода объектов, изделий, систем и технологий обрабатываются на Электронных Цифровых Вычислительных Машинах (ЭЦВМ), воплощаются в цифровые характеристики и данные, распространяются, хранятся и передаются в электронном виде с использованием сетей***.

И здесь мы подошли к самому главному – к существу вопроса о математических моделях, о том, на каком фундаменте они построены и как с помощью вычислительных систем они воплощаются в цифровые характеристики рассматриваемого явления или объекта. Фундамент этот называется ***Математическое моделирование***, его формирование шло веками, и только с середины прошлого века оно постепенно обрело современные черты.

Цель настоящей книги – дать общие представления о тех фундаментальных естественнонаучных основах, которые составляют базис передового инженерного знания. Этот базис, как уже сказано, есть *Математическое моделирование*, представляющее собой универсальную совокупность подходов и методов, на основе которых развиваются современная наука и инженерная деятельность. При этом сегодня мы можем смело утверждать, что ***Цифровой инжиниринг***, это важнейшее направление проектирования и инженерного анализа, является материальным (*технологическим, методологическим*) воплощением Математического моделирования.

Работая над книгой, авторы опирались на свой многолетний опыт использования вычислительных технологий в многочисленных работах с промышленностью, а также на опыт изучения роли цифровых технологий в мировом технологическом пространстве. Что касается работ с промышленностью, то они связаны практически со всеми направлениями физико-механики: от механики жидкости и газа до механики деформируемого твердого тела, и от разработки крупных конструкций до нанотехнологий. И этот опыт мы, по мере наших сил, и старались передать нашим читателям.

Кратко остановимся на содержании книги, состоящей из Предисловия, двух разделов и Заключения.

Раздел 2 посвящен математическим технологиям как одной из фундаментальных основ человеческой деятельности. Этот раздел носит основополагающий и, в то же время, исторический и ретроспективный характер. Почему основополагающий? Потому что рассматриваемая в нем концепция Математического моделирования является универсальным инструментом изучения Природы и фундаментом передовой инженерной деятельности.

При этом мы исходим из того, что математические методы есть часть всего фундамента естественнонаучного знания, где наряду с математикой основополагающее ядро составляет и физико-механика в виде составляющих ее дисциплин, которые позволяют построить основные уравнения механики прочности, механики жидкости и газа, тепло- и массообмена и так далее, являющиеся фундаментом инженерного знания.

Подчеркнем, что именно физико-механика, химия и другие науки позволяют нам строить качественные описания законов Природы, тогда как математика наполняет их количественным содержанием. Также в этом разделе на относительно простом примере мы показываем применение математических технологий (методов) в экономике.

В центре раздела находится рассмотрение существа Математического моделирования [1–3]. Дается определение Математического моделирования и те базовые фундаментальные понятия, которые составляют ядро самой концепции Математического моделирования. Мы стараемся показать критическую важность понимания исследователями и инженерами роли Математического моделирования для решения многих задач, демонстрируя это на примере обретающих все большую значимость задач оптимального проектирования.

С нашей точки зрения, дальнейшее повсеместное внедрение Цифровых технологий будет требовать все более глубокого и масштабного овладения основами подходов Математического моделирования, что уже сегодня требует внимательного пересмотра программ подготовки научных и инженерных кадров.

Сегодня уже на высшем государственном уровне звучат призывы к фундаментализации инженерного образования и указывается, что отставание в этой области является весьма опасным и может перерасти в серьезное технологическое отставание России.

Заметим также, что в нашей работе мы стараемся отстаивать четкость и корректность в определениях и формулировках, придерживаясь традиций нашей Alma Mater Санкт-Петербургского политехнического института (ныне – университета), который со времени своего основания всегда был проводником фундаментальных основ инженерного знания.

В **разделе 3** рассматривается история становления и развития Цифрового инжиниринга. Поскольку само понятие Цифрового инжиниринга появилось относительно недавно, то, как мы уже отмечали, естественно рассмотреть его генезис. И здесь нужно начинать с рассмотрения становления и развития самого понятия инжиниринга, а это требует от нас ретроспективного взгляда на проблему. Попутно заметим, что в книге мы всегда опираемся на исторический взгляд на развитие тех понятий, которые используем.

Итак, раздел 3 начинается с рассмотрения развития инжиниринга от Античности до первой половины XX века. Эти времена мы относим к первым трем этапам в его становлении и формировании. Конечно, эти века и тысячелетия – это времена, когда проходило становление естественнонаучного знания, и мы стараемся показать, как формировалась «живая ткань» связи научного знания и индустриальных технологий. Отдельно мы пытаемся рассказать о той драме, которая сопровождала труд ученых и инженеров, поставивших перед собой задачи реальной практики в конце XIX – начале XX веков и которую мы назвали непреодолимой «стеной» объема вычислений.

На примере названной «стены» показывается, как формировались инструменты ее преодоления, которые послужили началом создания технологической основы Цифрового инжиниринга в 1950-х – 1980-х годах – во времена, которые мы отнесли к IV этапу в формировании и развитии Цифрового инжиниринга.

Это время, время 50-х – 80-х годов прошлого века, является уникальным по ряду причин, которые в своей совокупности могут быть охарактеризованы как колоссальный инструментальный прорыв в изучении человеком окружающего мира Природы. И, конечно, первопричиной этого прорыва является появление ЭЦВМ (Электронных Цифровых Вычислительных Машин) в самом начале 50-х годов прошлого столетия. Мы пытаемся рассказать об этом периоде как с позиций развития вычислительных машин в мире, так и отдельно останавливаемся на том, как это проходило в нашей стране. Появление ЭЦВМ (ЭВМ) или, как сегодня принято – компьютеров[1], породило становление прямо связанного с ними инструментария Программного обеспечения (ПО), которое, в свою очередь, привело к созданию необъятной, охватывающей все стороны человеческой деятельности отрасли.

Нас же в первую очередь интересуют вопросы влияния компьютеров и порожденных ими технологий на промышленное производство. А масштабы этого влияния, как мы сегодня видим, колоссальны. Причем весь этот «технологический взрыв» произошел практически в течение последних 40–50 лет. Как это происходило и какие этапы мы здесь

---

[1] Всюду далее мы будем отождествлять понятия ЭЦВМ (ЭВМ) и компьютер.

выделяем, подробно рассказывается практически на протяжении всех пунктов, следующих за рассказом о появлении ЭЦВМ. Особо нами выделяются как основополагающие следующие моменты:

- создание языков программирования;
- создание программ, управляющих работой компьютеров – операционных систем;
- зарождение и формирование системы программных комплексов для естественнонаучного и инженерного анализа;
- формирование цепочки – триады CAD/CAE/CAM-технологий;
- создание инструментария в виде системы CALS-технологий;
- становление и развитие современного инструментария Цифрового инжиниринга.

При этом мы отдельно рассматриваем развитие названного инструментария в нашей стране. Также по итогам этого рассмотрения мы обсуждаем и вопросы подготовки нового поколения инженерных кадров.

Читатель, по-видимому, уже обратил внимание на то, что при описании глав – разделов нашей книги мы стараемся обратиться к истокам, к фундаменту Знания. Этой же точки зрения мы придерживаемся и при анализе потребностей Современной экономики в кадрах высшей квалификации. При этом, обращаясь к подготовке инженеров, мы глубоко убеждены, что с расширением роли Цифровых технологий в промышленности роль фундаментальной составляющей в инженерном образовании будет только нарастать.

Эту книгу невозможно написать, не опираясь на многочисленные источники. Все они значимы, важны и дают замечательную пищу для размышлений. Еще раз отметим, что данная книга ***отражает взгляды***

авторов, формировавшиеся у них многие годы, начиная с учебы, когда Математическое моделирование только набирало силу, и заканчивая последним десятилетием, когда им повсеместно пронизаны научная и инженерная деятельность и оно отражает существо глубинных основ формирующейся Цифровой экономики.

Именно поэтому мы старались показать, что Природу, как и все созданное человеком, можно изучать на основе либо физического, либо математического эксперимента, либо в их гармонии.

2 РАЗДЕЛ. О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

2.1. Введение к разделу 2

Этот раздел особый в нашем повествовании – он наполнен математическими построениями, и для тех читателей, которые совсем не знакомы с математикой, или для тех, чьи знания невелики, он может быть прочитан без глубокого проникновения в мир тайн этой царицы наук. Но вместе с тем его внимательное прочтение может быть весьма полезно, так как показывает математическое богатство предмета исследования и те трудности, которые преодолело человечество на путях поиска законов Природы. Более того, не будет преувеличением сказать, что именно математический инструментарий и его богатство как раз и является тем фундаментом, на котором строится вообще вся экономика.

Зададимся фундаментальным вопросом – а какими способами (методами) владеет человечество для исследования, изучения окружающего его мира Природы?

И этот вопрос – основополагающий и даже экзистенциальный в жизни человеческого сообщества, ведь веками люди противостояли наводнениям и цунами, ураганам и смерчам, землетрясениям и извержениям вулканов. Предсказания природных катаклизмов, такие бытовые проблемы как строительство жилья, сооружение укреплений и крепостей, строительство судов и мостов – все это требовало от людей особого внимания к окружающему их миру. И на этой основе тысячелетия тому назад и начало формироваться научное знание.

При этом именно с освоения (изучения) начал законов Природы начиналась тысячи лет тому назад простейшая производственная деятельность, которая сегодня уже немыслима без серьезных научных исследований. Имена всех величайших ученых Древнего мира, Средних веков, эпохи Возрождения и начала Новейшего времени прямо связаны с внедрением их идей в производственную и просто житейскую практику. Примеры этого можно перечислять очень долго, назовем лишь только одного, крупнейшего математика всех времен, гениального Леонарда Эйлера. Где только не приложил свой творческий гений математик-механик-кораблестроитель-картограф [4]. Это же можно сказать и о других титанах науки, Галилее, Ньютоне, Лагранже и многих других ученых [4].

Завершая наше краткое введение во 2-й Раздел, отметим, что он посвящен становлению теоретического фундамента науки – математического знания, и далее мы расскажем, как с конца Эпохи Возрождения формировался инструментарий математики. При этом мы попытаемся показать, как взаимодействие физико-механики и математики приносило плоды в отраслях научно-технического обеспечения инженерного и экономического знания. Расскажем также и о том, как в математике формировалось её важнейшее направление – математика вычислительная и какую революцию в науке и в инженерном деле породило появление вычислительных машин.

2.2. Как мы изучаем мир Природы или немного из истории науки

Мы не напрасно начали наше повествование с математики, поскольку ее первостепенная роль как науки об определении «количества» чего либо, – веса, скорости, силы и т.д., то есть, в конечном итоге, о нахождении характеризующей эти величины «цифры» является центральной при изучении того, что сегодня понимается под цифровой экономикой.

А теперь вновь обратимся к вопросу, который задали в самом начале, во Введении, – так какие же способы изучения Природы мы имеем в нашем распоряжении и что это за способы? Мы уже рассказали, что таких способов ровно два – это то, что мы называем физическим экспериментом и экспериментом теоретическим, т. е. математическим. Больше нам ничего не дано! При этом любой искушенный, да и неискушенный читатель, конечно, будет прав, когда скажет, что эти два подхода находятся во взаимосвязи друг с другом, о чем мы также будем говорить на протяжении всего нашего исследования.

И здесь совершенно естественным является то, что многие столетия изучение Природы было чисто эмпирическим, то есть опытным, или, как мы только что его назвали, физическим экспериментом – достаточно вспомнить гениального Архимеда (287–212 гг. до н.э.) с его законом. Первые же ростки глубокого теоретического взгляда на Природу и её явления, по большому счету, появились только в XVI веке, когда итальянец Н. Тарталья (1499–1557 гг.) построил подход к решению произвольного кубического уравнения

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

развитый в дальнейшем Д. Кардано (1501–1576 гг.). Конечно, и до Тартальи были получены определенные результаты, поскольку роль математики в определении «количества» чего либо, то есть, в конечном итоге, в нахождении характеризующей эти величины «цифры», всегда была велика. Но все-таки эти результаты были относительно простыми, и представляется, что именно построения Тартальи послужили точкой роста последовавших за ними крупных открытий в математике.

И здесь необходимо указать, что именно начавшееся к концу XVI века бурное развитие математики послужило началом становления фундамента теоретического знания. Действительно, со времен Архимеда человечество накопило огромный багаж опытного, экспериментального знания, которое давало хорошее качественное описание многих явлений Природы. Но для количественного описания этих явлений нужен был развитый математический аппарат, начало созданию которого и положили труды Тартальи и Кардано. Эта работа в ускоряющемся темпе, открывая новые отрасли математического знания, продолжается уже несколько веков, непрерывно расширяя горизонты нашего знания Природы.

При этом глубокие математические подходы (в их современном видении) как ключевой инструментарий научных исследований и инженерного дела практически отсутствовали до XVII века. И отсутствовали они в силу зачаточного состояния до этого времени технологий математического анализа в виде дифференциального и интегрального исчисления. Первые же количественно выраженные законы Природы – это и есть XVII век. Итак, обратимся к первым законам Природы, выраженным количественно, то есть в цифрах:

- это закон колебаний маятника длиной L:

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}$$

Х. Гюйгенса (1629–1695 гг.);

- закон о силе, возникающей при растяжении (сжатии) упругого твердого тела длиной L, под действием силы F:

$$F = -k\,L\,,$$

где постоянная k характеризует свойства материала тела – Р. Гук (1635–1703 гг.);

- закон Б.Паскаля (1623–1662 гг.) о полном давлении p в жидкости с плотностью ρ:

$$p = p_a + \rho g h,$$

складывающемся из внешнего давления среды p_a и давления столба жидкости высотой h.

Все это достижения XVII века. Да, это простейшие формулы, но они были первыми, положившими начало использованию симбиоза физико-механики и математики в инженерных расчетах.

Кроме названных основоположников теоретического научного знания, к выдающимся деятелям науки мы должны отнести и французского философа и математика Рене Декарта (1596–1650 гг.) – именно ему принадлежала идея построения системы прямоугольных координат.

Сила и важность математического эксперимента от века к веку становились все более значимыми в научном и инженерном сообществе, и этому способствовали такие триумфы математического знания, как, например, открытие тогда ещё неизвестной планеты Нептун англичанином Д. Адамсом (1819–1892 гг.) и французом У. Леверье (1811–1877 гг.) в 1846 г. Они сделали это открытие чисто теоретически, опираясь на теорию тяготения и математическое знание, на основе закона всемирного тяготения и подходов, разработанных Лагранжем и Лапласом, связанных с периодичностью возмущений в эксцентриситетах эллиптических планетарных орбит. И сделано это было без малого 200 лет тому назад!

Поскольку наша работа, по своей сути, посвящена применению математического эксперимента в тех или иных формах в такой важнейшей сфере деятельности экономики, как сфера материального производства, то нам необходимо каким-то образом формализовать то, что нами понимается под самим математическим экспериментом.

Говоря совсем просто, нам нужно ясным языком корректно описать то, что мы понимаем под этим фундаментальным понятием. И здесь далеко не все так просто и прозрачно, и поэтому читателю придется приготовиться к знакомству с не очень простыми понятиями из арсенала математики.

В завершении этого параграфа уместно указать и на то, что сегодня, как и в прошлом, многие понятия из области математического эксперимента часто используются без осмысления их существа. Например, существующие в обиходе, в том числе в высшей школе и в инженерной среде, понятия «компьютерное моделирование» или «суперкомпьютерное моделирование» при их обдумывании показывают, что они бессмысленны, поскольку компьютер ничего не моделирует – он всего лишь точно выполняет предписанные ему действия!

Эти действия прямо не связаны с собственно компьютерами, которые не являются их источниками (основой) и, как правило, имеют сугубо математические основы, обусловленные исключительно алгоритмами рассматриваемых задач. Отметим также, что алгоритм – это некоторая, как правило, конечная[1] совокупность заданных действий (операций) решения рассматриваемой задачи. Естественно, что алгоритмы берут начало в описывающих их математических соотношениях и только посредством программных средств (технологий) «управляют» действиями компьютера.

---

[1] Вместе с тем понятие алгоритма может быть распространено и на методы последовательных приближений, где число действий заранее неизвестно и определяется требованиями точности вычислений.

Пробелы и отсутствие глубины в освоении фундаментального естественнонаучного (особенно в части математики) знания у многих выпускников вузов, к сожалению, часто дают о себе знать, что и порождает неточности и ошибки на уровне ключевых понятий и определений. При этом подавляющее большинство студентов, да и не только студентов, не могут дать внятного ответа на вопрос, а что же служит основой, или фундаментом применения компьютеров, чему в большой мере и посвящена наша книга.

Лучший ответ – «вычислительная математика», не является вполне точным и полным, хотя вычислительная математика служит инструментом создания программного обеспечения в очень большой мере.

2.3. Математика и физико-механика – фундамент естественнонаучного и инженерного знания

В этом параграфе мы рассмотрим, как в течение XVII–XX веков на основе передовых достижений механики[1], физики и математики создавался фундамент естественнонаучного и инженерного знания. И, конечно, нас в первую очередь будут интересовать те вопросы, которые непосредственно связаны с промышленным производством, а это создание машин и механизмов, кораблей и сухопутных транспортных средств, мостов и сооружений и так далее. А какие вопросы здесь всегда стояли на передовых позициях?

Это вопросы прочности и надежности машин и механизмов, вопросы улучшения их характеристик, простота и дешевизна в изготовлении или, как сегодня принято говорить, технологичность. Весь этот набор свойств

[1] Следуя более чем вековой традиции Физико-Механического факультета (института) Политехнического института (университета), мы выделяем механику в отдельную отрасль.

и характеристик изделий и разного рода систем, в конечном итоге, сводится к свойствам материалов, конструкций, их перемещений и так далее. Но ведь эти свойства нужно уметь описать и оценить количественно! А это как раз и есть физико-механика и математика, применению которых и посвящен настоящий параграф.

Названные выше свойства материалов, жидкостей и пара (газов) – это свойства сплошных сред в разных фазах и создание соответствующих математических описаний на основе физико-механических свойств таких сред. И это было в центре внимания крупнейших ученых с конца XVII века до конца XX века. И сегодня тонкие свойства материалов и сред находятся в поле зрения науки.

Но если с изучением и описанием качественных свойств дело обстояло относительно «благополучно», о свойствах твердых тел, жидкостей и газов были написаны обширные трактаты, то с количественным описанием ситуация была гораздо сложней. И проблема состояла в том, что, как мы уже говорили, до рубежа XVII–XVIII веков попросту не было соответствующего математического аппарата.

Прорыв был совершен И. Ньютоном (1643–1727 гг.) и Г. Лейбницем (1646–1716 гг.), создавшими основы исчисления бесконечно малых или дифференциального и интегрального исчисления, что открыло бесконечный простор для построений того, что сегодня принято называть математическими моделями. Почему это был прорыв? Потому, что созданный математический инструментарий позволял приблизиться к описанию реального мира, в котором все протекает во времени и в пространстве.

Попробуем не быть голословными и покажем, как дифференциальное и интегральное исчисление позволяют описывать, пожалуй, наиболее сложный раздел механики сплошных сред – механику жидкости и газа. Почему наиболее сложный? Сложность эта обусловлена такими свойствами жидкости и газа как сплошность и текучесть, хотя свойство сплошности присуще и твердым телам, но при описании жидкости и газа оно носит особый характер. Жидкость и газ в нормальных условиях «не терпят» пустоты в отличие от твердых тел.

Начнем с понятия плотности жидкости ρ, которая есть отношение массы жидкости m к содержащему её объему v, то есть

$$\rho_{cp} = \frac{m}{v}.$$

Это некоторое среднее значение плотности ρ_{cp} в рассматриваемом объеме, а значение в каждой точке этого объема можно определять как некоторое предельное отношение при стремлении самого рассматриваемого объема к нулю. При этом очевидно, что плотность жидкости ρ в общем случае зависит как от времени, так и от координат, то есть $\rho = \rho(t, x, y, z)$, а согласно дифференциальному исчислению скорость изменения плотности со временем определяется величиной производной $\partial\rho/\partial t$.

Уравнение, описывающее поточечное изменение плотности жидкости, в 1752 г. получил Леонард Эйлер (1707–1783 гг.), которого по праву можно считать основателем гидромеханики. Приведем это уравнение:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \qquad (2.1)$$

Уравнение (2.1), где u,v и w – компоненты вектора скорости $\boldsymbol{V}$, т.е.

$$\boldsymbol{V}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}$$

в прямоугольных декартовых координатах, называют уравнением неразрывности [5]. В общем случае, когда плотность меняется от точки к точке, уравнение неразрывности (2.1) имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)=0\,, \tag{2.2}$$

когда же плотность постоянна, уравнение неразрывности преобразуется в уравнение несжимаемости:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{2.3}$$

Поясним смысл этого последнего уравнения, особо для тех, кто систематически не изучал математический анализ. Уравнение (2.3) показывает, что суммарное изменение всех трех компонент скорости по соответствующим координатам равно нулю – изменение одной компенсируется двумя другими, и «разрывов-пустот» в среде быть не может. Величина слева в (2.3) обозначается

$$div(\boldsymbol{V})=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

и называется расходимостью.

Но и до Эйлера в гидромеханике были получены весьма важные результаты, и их значительная часть принадлежала И. Ньютону. Здесь прежде всего укажем, что Ньютон установил так называемый реологический закон, когда в простейшем случае прямолинейного ламинарного (то есть «гладкого» невозмущённого) движения имеется связь между касательной компонентой трения в жидкости τ и поперечной к направлению потока производной скорости сдвига в виде соотношения:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (2.4)$$

Коэффициент пропорциональности μ, который, как правило, зависит только от температуры жидкости, носит наименование динамического коэффициента вязкости. Ньютон также построил корпускулярную модель обтекания тела набегающим потоком газа. Эта модель оказалась настолько эффективной, что нередко использовалась при расчетах течений газа с очень большими скоростями на заре космической эры.

Но, безусловно, наиболее важным достижением XVIII века было построение уравнений движения жидкости и газа. И этот выдающийся шаг был сделан великим Эйлером, который получил уравнения движения идеальной (невязкой) и несжимаемой жидкости. И здесь особо следует указать, что в математических моделях гидродинамики всегда были глубоко переплетены математика и механика, и именно Эйлер в этой отрасли знания положил начало строгим методам описания движения жидких сред, получив на основании законов динамики Ньютона уравнение для движения жидкости. Это было сделано Эйлером в работе «Общие принципы движения жидкостей», опубликованной в 1755 г.

Отметим, что Эйлер пользовался понятием давления, в определенном смысле противопоставляя свой взгляд на давление подходу Ньютона, который предполагал, что природа давления носит характер ударения частиц (вспомним про его корпускулярный подход) жидкости, набегающей на тело. Эйлер же исходил из открытого Паскалем закона об изотропии (независимости от направлений) нормальных напряжений в точках сплошной среды. Здесь сразу

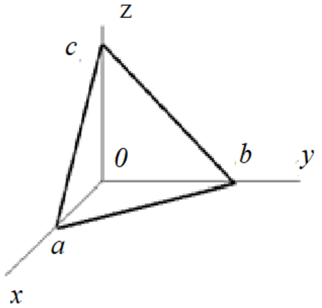

Рис. 2.1 Площадь задачи

отметим, что под напряжением в некоторой малой области сплошной среды мы понимаем отношение вектора сил $\delta \boldsymbol{p}'$, приложенных со стороны среды, к выделенной малой треугольной площадке (a,b,c) площадью δs (рис. 2.1) в этой области:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\delta \boldsymbol{p}'}{\delta s}.$$

Это некоторое среднее значение напряжения, и для получения значения напряжения в данной точке в последнем соотношении также надо совершить предельный переход, полагая, что $\delta s \to 0$. Наряду с площадкой (a,b,c) площадью δs_n рассмотрим ее проекции на координатные плоскости (рис. 2.1): на плоскость (z,y) – ($0,b,c$), на плоскость (z,x) – ($0,a,c$), и, наконец, на плоскость (x,y) – ($0,a,b$). Площади соответствующих площадок назовем δs_x, δs_y и δs_z.

Запишем теперь уравнение равновесия построенного таким образом жидкого объема в виде тетраэдра с учетом конечности приведенного выше соотношения для векторов напряжения, то есть выделяя главную часть при $\delta s \to 0$

$$\boldsymbol{p}_n = \cos(n,x)\boldsymbol{p}_x + \cos(n,y)\boldsymbol{p}_y + \cos(n,z)\boldsymbol{p}_z$$

Здесь $\boldsymbol{p}_n$, $\boldsymbol{p}_x$, $\boldsymbol{p}_y$ и $\boldsymbol{p}_z$ – вектора напряжений, приложенные к соответствующим образом выбранным сторонам площадок δs_n, δs_x, δs_y и δs_z.

Рассматривая каждый из векторов напряжения, выделяют в них нормальные составляющие p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, которые являются проекциями векторов напряжений $\boldsymbol{p}_x$, $\boldsymbol{p}_y$ и $\boldsymbol{p}_z$ на нормали к соответствующим им площадкам, и касательные p_{xy}, p_{yz}, p_{zx}, … – проекции на оси, лежащие в плоскостях площадок. Эти построения были сделаны О. Коши (1789–

1857 гг.). В дальнейшем на их основе было введено понятие тензора и сформировался мощный аппарат тензорного анализа, позволивший строить корректные модели механики сплошной среды [5].

Возвращаясь к получению Эйлером уравнения динамики жидкости, начнем с того, что он исходил из уравнения закона Ньютона $ma=F$. Проанализировав силы, действующие на жидкий объем, Эйлер пришел к выводу, что это силы тяжести (или массовые силы) и поверхностные силы давления. Таким образом, уравнение движения жидкого объема, например, по оси x, принимает вид:

$$\rho\frac{du}{dt} = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x},$$

где F_x есть x – компонента массовых сил (например, сил тяжести), а $\partial p/\partial x$ характеризует изменение давления по оси x. Знак минус перед производной означает, что силы давления действуют в направлении, противоположном нормали к поверхности жидкого объёма. Выписывая аналогичные уравнения для y и z компонент и объединяя их, получим уравнение движения жидкости в прямоугольных декартовых координатах в векторном виде:

$$\rho\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \rho\boldsymbol{F} - grad\ p \qquad (2.5)$$

где $\boldsymbol{V}$ – определенный выше вектор скорости с компонентами (u,v,w), а $\boldsymbol{F}$ – вектор массовых сил с составляющими F_x, F_y и F_z. Отдельного комментария требует вектор – функция $grad\ p$, которая определяется следующим образом

$$grad\ p = \frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

и по своему смыслу есть вектор, характеризующий направление наискорейшего роста функции в данной точке.

Обратимся к величине производной $d\boldsymbol{V}/dt$ в уравнении (2.5), которую нужно понимать в некотором обобщенном смысле, поскольку эволюция движения жидкости весьма сложна – двигаясь в потоке, жидкая частица может перемещаться и от точки к точке в самом потоке. Замечая, что у нас в общем случае $\boldsymbol{V}(t;x,y,z)$ (в традиционных переменных, которые здесь назовем Эйлеровыми переменными), и записывая выражение для производной по некоторому направлению – траектории *s*, найдем [5]

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial s}\frac{ds}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial s}\boldsymbol{V}$$

где ds – элемент дуги траектории. Поскольку $\boldsymbol{V}$ есть функция t, x, y и z, то производную $d\boldsymbol{V}/dt$ можем записать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Или, памятуя, что производные от координат по времени есть проекции её скорости на координатные оси, окончательно найдем

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+u\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x}+v\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y}+w\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z}.$$

Откуда для каждой из составляющих вектора скорости u, v и w получим, например, для u:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Теперь у нас есть возможность привести полную систему уравнений Эйлера динамики идеальной жидкости в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned}
\rho\frac{du}{dt} &= \rho(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}) = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x}\\
\rho\frac{dv}{dt} &= \rho(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}) = \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y}\\
\rho\frac{dw}{dt} &= \rho(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}) = \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

Как видим, полученная система уравнений является нелинейной в силу наличия в левой части уравнений составляющих вида

$$u\frac{\partial u}{\partial x}, v\frac{\partial v}{\partial y}, w\frac{\partial w}{\partial z}, \ldots,$$

которые представляют собой так называемую конвективную часть ускорения.

При фиксированной плотности жидкости эта система уравнений содержит четыре неизвестных функции u,v,w и p. Поэтому к трем уравнениям (2.6) мы должны добавить четвертое уравнение – уравнение неразрывности (2.3). Полученная система уравнений (2.3) и (2.6) должна быть дополнена начальными и краевыми условиями, отвечающими существу рассматриваемой задачи.

Сказать, что система уравнений (2.3) и (2.6) сложна для решения, будет очень слабой оценкой тех трудностей, с которыми мы сталкиваемся даже при сегодняшнем уровне развития как методов вычислений, так и имеющихся вычислительных ресурсов, при попытке решения этой системы.

Но наша задача как раз и состоит в том, чтобы показать читателю эти трудности и указать пути их преодоления, и здесь мы благодаря гению Архимеда, Ньютона, Лейбница и Эйлера и так продвинулись довольно далеко. Правда, продвинулись только в постановке задачи, как с качественных позиций физико-механики, так и в форме математических соотношений.

Последний сюжет, на котором мы кратко остановимся в части того, что уместно назвать классической гидроаэродинамикой, – это уравнения движения жидкости и газа с учетом вязкости – уравнения Навье-Стокса. В действительности Клод Навье (1785–1836 гг.) и Габриель Стокс (1819–1903 гг.) подвели черту под почти двухвековыми поисками ученых в моделировании вязкости, восходящими к Ньютону.

Как мы уже говорили, именно Ньютон установил реологический закон (2.4), когда в простейшем случае прямолинейного «сдвигового» ламинарного движения имеется связь между касательной компонентой напряжений (трения) τ и поперечной к направлению потока производной скорости сдвига – касательной компоненты скоростей деформации.

В дальнейшем значительную роль в формировании моделей сплошной среды, включая жидкость и газ, сыграли работы О. Коши (1789–1857 гг.), о чем мы говорили немного выше. Отметим, что Навье и Коши шли разными путями: Навье исходил из корпускулярной модели сплошной среды, тогда как Коши полагал ее континуумом. В связи с этим нельзя не упомянуть о работах сербского математика Р. Бошковича (1711–1787 гг.), оригинальная корпускулярная модель которого [6] как раз и послужила для Навье основой построения модели вязкой жидкости.

Приведем систему уравнений Навье-Стокса в покомпонентной форме, заметив, что оператор $\nabla^2(.)$ имеет вид:

$$\nabla^2(.) = \frac{\partial^2(.)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(.)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(.)}{\partial z^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\rho\dfrac{du}{dt}=\rho(\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}) = \rho F_x-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u\\
\rho\dfrac{dv}{dt}=\rho(\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}) = \rho F_y-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2 v\\
\rho\dfrac{dw}{dt}=\rho(\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}) = \rho F_z-\dfrac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 w
\end{array}\right\} \qquad (2.7)$$

Как и в случае системы уравнений (2.3) и (2.6), уравнения (2.7) должны быть дополнены уравнением неразрывности и соответствующими начальными и краевыми условиями, также отвечающими существу рассматриваемой задачи.

Построением уравнений Навье-Стокса мы завершим наше краткое описание математических моделей гидроаэродинамики, того периода, который с некоторой долей условности назовем классическим. Конечно, наша градация относительна, но с позиций того, как развивались математические модели в этой области механики сплошных сред, новый этап, последовавший за описанным выше, весьма важен, поскольку он начался с построения совершенно иной гидроаэромеханики, ядром которой является механика турбулентности[1]. Этот раздел гидроаэромеханики был начат трудами выдающегося английского ученого Осборна Рейнольдса (1842–1912 гг.). Это последняя четверть XIX века.

Прежде всего отметим, что Рейнольдс экспериментально установил фундаментальную роль отношения сил инерции и сил вязкости в переходе от ламинарного течения к турбулентному. В безразмерном виде это отношение, называемое числом Рейнольдса, имеет вид:

$$\mathrm{Re}=\mathrm{V}\,L/\,\nu, \qquad (2.8)$$

[1] Самое любопытное заключается в том, что, по ряду оценок, эпоха механики турбулентности закончится примерно к концу этого века, и об этом далее.

где произведение V L определяет силы инерции, а величина кинематической вязкости ν, определяемая как отношение μ / ρ, характеризует вязкие силы. Рейнольдсом было установлено, что при превышении величиной Re, выражаемой формулой (2.8), некоторого критического значения ламинарное течение переходит в турбулентное. Этим важнейшим результатом многолетние эксперименты Рейнольдса (с 1876 по 1883 гг.) не исчерпываются, поскольку именно им была построена в определенном смысле универсальная математическая модель турбулентного течения. Рейнольдс первым указал на необходимость разделения характеристик турбулентного течения на некоторые осредненные составляющие (условно сглаженные величины $\overline{\mathbf{V}}$ и $\overline{P}$) и пульсационные добавки $\mathbf{v}'$ и p'. В таком случае для вектора скорости и давления имеем:

$$\mathbf{V} = \overline{\mathbf{V}} + \mathbf{v}', \; P = \overline{P} + p'. \tag{2.9}$$

Нельзя не отметить и основополагающие работы Рейнольдса в области критериев подобия [5] различных течений вязкой жидкости. Представляется, что именно на этом пути им были получены важнейшие для практики результаты для описания течений в тонких слоях жидкости, приведшие к построению уравнения для жидкой и газовой смазки, носящего его имя [7].

Результаты Рейнольдса по моделированию турбулентности более семидесяти лет не получали своего развития и не по причине их не востребованности, а по причине отсутствия как численных методов, так и вычислительных средств для их реализации. И именно массовое внедрение ЭВМ, а затем и СуперЭВМ привело к бурному развитию вычислительной гидроаэродинамики и, как следствие, к высокой востребованности моделей турбулентности [8].

Выше мы назвали первые результаты работы по моделированию турбулентности, принадлежащие Рейнольдсу. С обсуждения математической модели турбулентности Рейнольдса мы и начнем. Прежде всего обратимся к формулам (2.9), первую из которых запишем в покомпонентном виде:

$$u = \overline{u} + u', v = \overline{v} + v', w = \overline{w} + w', \;\; p = \overline{p} + \; p'. \tag{2.10}$$

Со времени Рейнольдса величины скоростей u, v и w называли действительными мгновенными скоростями потока в данной точке потока, тогда как $\overline{u}, \overline{v}$ и $\overline{w}$ – скоростями, осредненными по времени, и, наконец, u', v' и w' – отклонениями скоростей от осредненных или пульсациями скоростей. Также определим и составляющие формулы для давления.

Трудным вопросом, который возникает сразу же при рассмотрении формул (2.10), является вопрос о том, а как определять все введенные величины? Действительно, мы не знаем ни масштабов вихрей, ни их частотного спектра, и эта ситуация требует построения некоторых гипотез. Первой из них является предположение о том, что все пульсационные составляющие существенно меньше осреднённых величин. Вторая определяет саму процедуру осреднения, за которую выберем стандартное интегральное среднее:

$$\overline{\phi} = \int\limits_{\tau-T/2}^{\tau+T/2} \phi(x, y, z, t)\, dt, \tag{2.11}$$

где, в свою очередь, проблемным является выбор периода осреднения *T*.

Работы Рейнольдса породили мощное направление в гидроаэродинамике второй половины XX века – так называемые RANS-методы (Reynolds-Averaged Navier-Stokes – уравнения Навье–Стокса, осреднённые по Рейнольдсу) [8]. Уравнения RANS-модели содержат неизвестные величины, так называемые «Рейнольдсовы напряжения», что порождает незамкнутость модели Рейнольдса, означающую, что число искомых неизвестных не совпадает с числом определяющих уравнений, которых меньше, чем неизвестных. Последнему обстоятельству, а точнее пути преодоления этой проблемы и подходам к практическому применению RANS-модели на основе построения некоторых дополнительных соотношений для их определения, в значительной мере были посвящены труды специалистов в области гидроаэромеханики последние примерно 70 лет. А мы, дабы окончательно не погубить у читателя интерес к нашей работе, на этом и остановимся, сделав одно важное замечание.

Современные воззрения на математическое моделирование турбулентности в определенном смысле парадоксальны, поскольку считается, что турбулентные течения подчиняются классическим уравнениям Навье–Стокса. И это обуславливает то, что математическое моделирование турбулентности, вообще говоря, решенная проблема. Вместе с тем в реальности мы имеем весьма драматическую картину. Во-первых, это связано с тем, что для описания развитого турбулентного течения, отвечающего большим числам Рейнольдса, например, нескольким десяткам тысяч, пространственно-временной спектр пульсаций которого очень широк, требуются весьма нетривиальные численные (так называемые разностные) методы.

И, во-вторых, вычислительные ресурсы для математического моделирования таких задач практически недостижимы в ближайшие не то что годы, но и десятилетия. Чтобы не быть голословными, приведем в таблице 2.1 оценки вычислительных ресурсов, необходимых для расчетов в области авиационной и автомобильной техники на основе прямого численного решения уравнений Навье–Стокса, так называемые DNS-технологии (Direct Numerical Simulation – прямые численные решения уравнения Навье–Стокса) [8]. Отметим, что оценки, приведенные в таблице, получены на основе предположения, что мощность вычислительных систем растет в два раза каждые пять лет.

Таблица 2.1 Оценки вычислительных ресурсов, необходимых для расчетов в области авиационной и автомобильной техники.

Метод	Характерный размер сетки	Число шагов по времени	Готовность (год)
DNS	10^{16}	$10^{7,3}$	2080

Этой последней таблицей мы и отвечаем на сформулированное выше примечание о том, что эпоха механики турбулентности «закончится» примерно к концу текущего века.

Итак, здесь мы только слегка прикоснулись к тому удивительному богатству подходов и технологий, которые содержат в себе математические методы в виде дифференциального и интегрального исчисления, развивающиеся вот уже четвертое столетие и восходящие к работам Ньютона и Лейбница. Опираясь на эти основы, великий Эйлер, соединив математику и физико-механику, построил уравнения движения жидкости, что было недостижимым более двух тысяч лет после трудов другого гения – Архимеда. Продолжая труды Эйлера, выдающиеся ученые в XIX–XX веках, развивая идеи основоположников, невероятно далеко продвинули и математический анализ, и физико-механику – фундамент естественнонаучного и инженерного знания.

2.4. *Математические технологии в экономике*

С тем, чтобы читатель мог убедиться в некотором смысле в тотальности математических технологий, приведем весьма характерный пример их применения в экономике. Пожалуй, одним из крупнейших, да и наиболее известным достижением в применении здесь математических моделей являются работы советского математика Леонида Витальевича Канторовича (1912–1986 гг.), за которые в 1975 г. он получил Нобелевскую премию с формулировкой «За вклад в теорию оптимального распределения ресурсов». Эта тема допускает весьма простое и наглядное описание, к которому и переходим.

Итак, пусть в n пунктах производят некоторый продукт, например, цемент, в количествах a_i ($i=1, 2, \ldots, n$) в каждом. Этот продукт потребляют в m пунктах, соответственно в количествах b_j ($j=1, 2, \ldots, m$) в каждом. Очевидно, что при правильной организации производства количество произведенного цемента должно совпадать с количеством потребленного, т.е. должно выполняться уравнение баланса

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_m. \qquad (2.12)$$

Центральной проблемой является эффективная, т.е. экономически целесообразная система организации перевозок от производителя к потребителю. При этом уравнения, которые описывают производство продукта во всей экономической системе, имеют следующий вид:

$$\begin{array}{c} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1m} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2m} = a_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nm} = a_n \end{array} \qquad (2.13)$$

и называются *уравнениями производства,* где символом x_{ij} обозначено количество продукта, произведенного в пункте i и потребленного в пункте j.

Совершенно аналогично мы можем представить и *уравнения потребления,* при чем вполне очевидно, что в общем случае в разных пунктах потреблять продукт будут в разных же количествах и разного вида:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{n1} &= b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{n2} &= b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \\ x_{1m} + x_{2m} + \ldots + x_{nm} &= b_m \end{aligned} \qquad (2.14)$$

Очевидно, что в уравнениях (2.13) и (2.14) некоторые компоненты могут быть равными нулю. Где же в этой задаче, весьма громоздкой для реальной экономики, сама проблема «оптимального распределения ресурсов»? Она кроется в разработке наилучшего плана перевозок. Действительно, в масштабах нашей России задача разработки наилучшего плана перевозок более чем актуальна в рамках рационального планирования. Зачем везти цемент требуемой марки из Северо-Западного региона на Дальний Восток, если его можно привезти из Восточной Сибири.

Теперь в предположении, что стоимость перевозки единицы продукции (например, одной тонны) из пункта i в пункт j есть величина c_{ij} ($i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, m$), мы можем написать такое выражение для суммарной стоимости всех перевозок:

$$
\begin{aligned}
F = c_{11}x_{11} + c_{21}x_{21} + \ldots + c_{n1}x_{n1} + \\
+ c_{12}x_{12} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{n2}x_{n2} + \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
+ c_{1m}x_{1m} + c_{2m}x_{2m} + \ldots + c_{nm}x_{nm}
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

При этом необходимо исключить встречные перевозки одного и того же продукта, что отвечает условию

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1, 2, \ldots, n, \; j=1, 2, \ldots, m \tag{2.16}$$

Таким образом, мы имеем математическую модель плана перевозок продукции, включающую в себя систему уравнений ограничений (2.12–2.14) и (2.16), которые характеризуют «состояние» системы, и критерий (2.15), описывающий стоимость всей совокупности перевозок. Оптимальный план перевозок отвечает минимуму функции F, то есть минимуму стоимости всех перевозок при выполнении ограничений задачи. При этом, как мы видим, функция F и все ограничения задачи являются линейными функциями по переменным x_{ij}. Такой класс задач называют задачами линейного программирования. Конечно, здесь речь идет о программировании как методе планирования, причем о наилучшем.

Итак, как мы видим, важнейшая в рамках государственного планирования задача оптимального распределения ресурсов есть чисто математическая проблема, для решения которой нужно разработать соответствующие методы и иметь значительные вычислительные ресурсы. Но ведь мы выбрали лишь одну отрасль производства – производство цемента, а в масштабах государства таких отраслей много, при этом нужно иметь в виду и масштабные межотраслевые связи, которые присутствуют в развитой экономике.

Итак, повествуя о том, что такое математическое моделирование, мы на примере относительно простой проблемы показали, как оно помогает решать чисто экономические задачи. Отметим, что приведенный сравнительно простой пример весьма характерен, поскольку он показывает, что решения большинства научно-организационных проблем экономики лежат исключительно в сфере применения методов математического моделирования.

2.5. О концепции Математического моделирования

Наиболее полным и точным ответом на вопрос о том, что современная наука понимает под математическим экспериментом, является определение (понятие) Математического моделирования. Единый и систематически выверенный взгляд на то, что же такое математическое моделирование, был разработан выдающимся советским – российским математиком Александром Андреевичем Самарским (1919–2008 гг.) [1–3]. Также в ***формировании инструментария*** математического моделирования выдающуюся роль сыграли советские – российские ученые, О.М. Белоцерковский (1925–2015 гг.), А.А. Дородницын (1910–1994 гг.), которые развивали преимущественно такие важнейшие прикладные направления исследований как аэродинамика.

В формировании Концепции математического моделирования ключевая роль принадлежала академику А.А. Самарскому. Приведем основные позиции (блоки) концепции Математического моделирования [2; 3], к которым мы в той или иной мере будем обращаться далее, в том числе и опираясь на наши работы.

I блок. Составление математической модели явления, процесса, некоторой системы и т.д.

Это, вообще говоря, предметная область естественных и других наук, где составляются количественные соотношения для описываемых явлений и процессов. И это труднейшая область научной деятельности, представляющая основу самого естественнонаучного знания. Итак, выделяя основное, этот блок составляет существо некоторой «замены», например, реального физического процесса или какого-либо явления, его математической моделью, то есть описание всех его количественных свойств-характеристик с помощью математических соотношений.

В этом описании важнейшим является именно сам факт замены объекта, свойства (характеристики) которого мы не можем, как в целом, так и в деталях, определить при физическом (натурном) изучении, либо по причине каких-либо принципиальных трудностей, либо по причине физической невозможности. Например, исследование аэродинамики самолета в аэродинамической трубе при больших скоростях – более 200 м/с – практически невозможно, но можно, разработав математическую модель его обтекания, получать характеристики обтекания с помощью вычислений на компьютере. При этом вычислительный эксперимент позволяет нам исследовать поведение летательного аппарата при таких скоростях, которые относятся уже к гиперзвуковым (более 2–3 км/с) и какие принципиально невозможно получить при натурном эксперименте в аэродинамической трубе. И, конечно, здесь ключевым является фактор адекватности построенной нами математической модели обтекания самолета реальному физическому процессу. И, как мы убедились ранее, модели аэрогидродинамики весьма сложны, а ведь мы только слегка прикоснулись к богатейшему математическому инструментарию этой отрасли современного научного и инженерного знания.

Здесь же отметим и тот факт, что рассматриваемый блок является наиболее проблемным и дискуссионным, поскольку в ряде случаев разработанные к настоящему времени математические модели не могут полноценно описать явление или объект и требуют своего развития. В других случаях, наоборот, тонкие математические модели пытаются применить для расчетов, не требующих очень высокой точности. Например, зачем рассматривать перемещения нагружаемых элементов конструкции металлического железнодорожного моста с точностью до микрон, когда достаточно много меньшей точности – до нескольких миллиметров. И таких примеров можно привести множество.

II блок. Анализ математической корректности построенной математической модели, описывающей нашу задачу

Математическая корректность изучаемой задачи – это важнейшее понятие, связанное с математическим существом её постановки. Решение проблемы математической корректности включает в себя установление таких фактов:

- ***искомое решение принадлежит к тому классу объектов (функций, векторов и т.д.), где мы его разыскиваем***;

- ***искомое решение единственно в том классе, где мы его разыскиваем***;

- ***малые возмущения исходных данных не приведут к большим изменениям решения задачи***.

Таким образом, весь спектр рассматриваемых здесь проблем носит сугубо математический характер и в подавляющем большинстве обходится исследователями и инженерами. У опытных вычислителей, как правило, есть понимание, «чутье», если угодно, на то, что должно получиться. Однако такой путь опасен, и дорогой читатель на конкретных примерах должен увидеть, к чему может привести недопонимание важности проблем данного блока.

Поскольку проблемы математической корректности относятся к числу наиболее трудных, попытаемся пояснить одну из сторон корректности на простом примере. Рассмотрим систему из двух линейных алгебраических уравнений, способы решения которой большинству читателей известны со школьных лет:

$$\begin{aligned} 1.0x_1 + 0.9x_2 &= 1.9 \\ 0.9x_1 + 0.8x_2 &= 1.7 \end{aligned}$$

Очевидное решение этой системы уравнений:

$$x_1 = x_2 = 1.0$$

Однако, если мы совсем немного изменим величины правой части:

$$\begin{aligned} 1.0x_1 + 0.9x_2 &= 1.902 \\ 0.9x_1 + 0.8x_2 &= 1.724 \end{aligned}$$

то решение нашей системы очень сильно изменится, а именно мы получим

$$x_1 = 3.0; \; x_2 = -1.22$$

Таким образом, малые величины возмущения правой части (соответственно на 0.002 и на 0.024) привели к очень большим возмущениям в решении. В чем же дело? Оказывается, что исходная задача относится к классу неустойчивых по отношению к возмущениям параметров задачи – малые возмущения правой части системы уравнений привели к сильным возмущениям результата. При этом такая ситуация имеет простое геометрическое объяснение. Поскольку линии, отвечающие уравнениям в нашей исходной системе, почти параллельны, то малое изменение параметров этих линий приводит к тому, что точка их пересечения может сильно удаляться от точки $x_1 = x_2 = 1.0$, как показано на рис. 2.2.

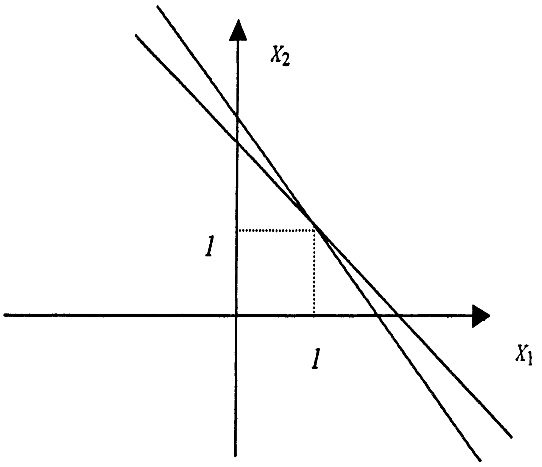

Рис.2.2 Пример неустойчивой задачи

Но это только одна из сторон корректности в постановке задачи! Имеются и другие, которые подчас имеют критическое значение, и мы можем утверждать, что их роль со временем и углублением роли математического моделирования в инженерном анализе будут возрастать. Особенно это относится к проблемам оптимизации конструкций [7; 9], важность решения задач которой приобретают все большую остроту, при этом конструкторы и инженеры-расчетчики подчас пренебрегают надлежащим математическим анализом поставленной задачи. Характерный пример последнего приведен в наших работах [7; 9; 10], посвященных оптимальному проектированию в области прикладной газовой динамики, к чему мы еще обратимся далее.

III блок. Переход от непрерывной математической модели к модели дискретной

Отметим, что в ряде задач этот блок может отсутствовать, то есть он, как правило, характерен для описания таких моделей явлений, которые содержат дифференциальные и интегральные соотношения. ***Непрерывной***[1] здесь мы называем исходную задачу, которая записана в традиционной математической форме, тогда как ***дискретной*** именуем задачу, являющуюся некоторым приближением к исходной, в которой искомые непрерывные или кусочно-гладкие функции заменены табличными. Такой переход обусловлен тем обстоятельством, что компьютеры могут работать с цифровыми данными в формате таблиц, например, одномерными

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

или двумерными

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1m} \\ y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2m} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nm} \end{pmatrix}$$

таблично заданными функциями или таблицами с еще большей размерностью. При этом описывающие (представляющие) такие данные числа имеют конечное число знаков, ведь только с такими числами работают компьютеры. Такие таблично заданные функции, при выполнении некоторых условий, могут, вообще говоря, сколь угодно хорошо «приблизить» искомую непрерывную функцию, которая по своей математической природе есть «бесконечномерный объект».

---

[1] В самом общем случае само решение задачи может быть и не непрерывным.

И здесь следует отметить, что при переходе от непрерывной модели к дискретной мы, по сути дела, ***переформулируем*** нашу задачу и получаем некоторую новую, в которой присутствует один или несколько параметров, характеризующих эту новую дискретную задачу и которых не было в исходной задаче. В наших вышеприведенных таблицах такими параметрами являются соответственно n в первой таблице, n и m во второй.

Здесь характерным примером может служить задача приближенного вычисления интеграла – когда мы вычисляем его с помощью, например, формул трапеций или Симпсона, или каких-либо других формул [11], в которых имеется параметр n, связанный с разбиением промежутка интегрирования и который как раз и определяет степень точности такого приближения. Обратимся к характерному примеру, где без приближенного решений не обойтись. Рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx. \tag{2.17}$$

Несмотря на столь простой вид подынтегральной функции $\sin x/x$, этот интеграл «не берется», то есть невозможно найти отвечающую ему явную формулу, и поэтому здесь нужно использовать какой-либо приближенный (численный) метод. Как сказано выше, имеется множество методов приближенного вычисления интегралов, мы же используем так называемый метод трапеций, который обладает относительно высокой точностью и имеет простую геометрическую интерпретацию. Будем исходить из геометрического смысла нашего интеграла (2.17), который представляет собой площадь криволинейной трапеции[1], ограниченной сверху линией функции $sin\ x/x$, снизу – осью x и боковыми границами $x=0$ и $x=1$. Разобьем промежуток [0,1] на n постоянных шагов величиной $h= 1/n$ таким образом

$$x_0=0,\ x_1=x_0+h,\ \ldots,\ x_{i+1}=x_i+h,\ \ldots,\ x_n=1.$$

Теперь на каждом из n полученных промежутков $[x_i,\ x_{i+1}]$ ($i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$) построим элементарные трапеции, сумма площадей которых приближает площадь нашей криволинейной трапеции. В итоге получим такое приближение для величины интеграла, выражаемое суммой S_n:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx S_n = \frac{h}{2}[(f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + \ldots + (f_{n-1} + f_n)] \qquad (2.18)$$

где символом f_i ($i=0,\ 1,\ldots,\ n$) обозначены значения нашей исходной подынтегральной функции $sinx/x$ в узлах сетки x_i, то есть $f_i = f(x_i)$ ($i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$). Формула (2.18) наглядно показывает,

N	S_n
10	0.945832071866
100	0.946080560625
1000	0.946083045270
10000	0.946083070116
100000	0.946083070365
1000000	0.946083070367
10000000	0.946083070367

- во-первых, математическое существо переформулировки задачи от её исходной непрерывной постановки к её дискретному или конечно-разностному аналогу;

- во-вторых, то, что, выбирая те или другие значения числа точек разбиения n, мы с его увеличением получаем все более точные значения искомого интеграла, как это и показывает таблица слева.

[1] Здесь наглядно видна замена непрерывной функции sin x/x табличной функцией в точках равномерной сетки $\{x_i\}$(i=0, 1, 2, …, n), на основе которой строится кусочно-линейная функция, приближающая исходную.

Таким образом, вновь обращаясь к формуле (2.18), мы видим, что $S_n \underset{n\to\infty}{\to} J$.

В третьей главе, рассматривая вопросы программирования, мы в качестве примера приведем программу, реализующую вычисления по формуле (2.18), и подробно поясним, как она реализует эту формулу.

Далее в этом параграфе мы приведем еще примеры применения методов вычислительной математики, рассматривая существенно более сложные проблемы, связанные с решением дифференциальных уравнений в частных производных.

IV блок. Анализ математической корректности вновь полученной дискретной задачи (на основе исходной)

По сути дела, этот блок есть предмет вычислительной математики, иначе говоря, составляет существо её подходов применительно к рассматриваемой задаче. Принципиально здесь изучаются те же проблемы, что и в блоке II, к которым добавляется еще одна задача, весьма важная. Решение этой последней задачи должно ответить на такой вопрос – будет ли построенная в блоке III дискретная задача, например, величина конечной суммы S_n в приведенном только что методе трапеций, при числе разбиений промежутка [0, 1] с помощью параметра $n \to \infty$ стремиться к числу, равному точному значению исходного интеграла? Но именно этот процесс мы и наблюдаем в приведенной выше таблице. Таким образом, мы действительно имеем основание записать приведенное выше предельное соотношение:

$$S_n \underset{n\to\infty}{\to} J.$$

Напомним, что последнее соотношение означает, что последовательность чисел S_1, S_2, …, S_n, … стремится к числу J, приближаясь к нему сколь угодно близко (что и демонстрирует приведенная выше таблица).

V блок. Написание алгоритма для дискретной задачи, то есть последовательности вычислительных шагов, и его перенос на компьютер – программирование

Этот блок носит совершенно особый характер, и его роль со времени внедрения вычислительных машин в научную и инженерную практику непрерывно нарастала. В чем же состоит особенность этого блока и по каким причинам его роль непрерывно нарастала с внедрением вычислительных машин? Выше мы определили понятие ***алгоритма*** и на основе этого определения можем утверждать, что для подавляющего большинства задач алгоритм есть некоторое формализованное продолжение блока III решения задачи, когда «расписывается» последовательность шагов-операций решения, например, дискретной задачи. Естественно, что этот блок полностью опирается на математику, в первую очередь на её вычислительные основы.

VI блок. Отладка программы, то есть её тестирование, получение результатов и их анализ

Кратко остановимся на назначении этого блока. Прежде всего мы должны пояснить, что ***программа*** – это ***запись*** алгоритма решения задачи (проблемы) на каком-либо языке программирования (алгоритмическом языке) либо на языке команд (кодов) компьютера. Программы подразделяют на системные и прикладные. Подробнее мы остановимся на этом в дальнейшем, рассматривая исторический путь формирования компьютерных технологий применительно к решению задач инженерного анализа. Под отладкой программы – её тестированием – понимают устранение ошибок, которые появляются в процессе её написания. Эти ошибки могут иметь разную природу – как в виде ошибок, допущенных нами при написании алгоритма, так и ошибок в записи языка программирования или команд-операторов какой-либо программной CAE-системы.

Таким образом, мы можем определить ***Математическое моделирование как процесс исследования (изучения) явлений Природы, любого класса (объектов) машин, механизмов, систем и технологий с помощью целостной, последовательной совокупности взаимосвязанных математических моделей и методов на основе компьютерных технологий, обеспечивающих полное и корректное решение проблемы описания объекта и определение его характеристик с требуемой точностью.***

Особо подчеркнем, что мы говорим о ***целостном*** процессе, то есть о взаимосвязанной совокупности технологий! Под ***последовательной*** же совокупностью мы понимаем строгую очередность в реализации блоков Концепции, то есть, например, сначала постановка задачи, а потом анализ её корректности, но не наоборот. Отметим, что в этом определении под технологиями мы подразумеваем подходы и методы как математические, так и программные, и сетевые.

В согласии с приведенным выше определением ***Математической моделью назовем целостную (единую) совокупность взаимосвязанных математических соотношений, обеспечивающих полное и корректное решение проблемы вычисления характеристик явлений Природы, разработки моделей любого класса (объектов) машин, механизмов, систем и технологий с требуемой точностью. Содержание математической модели может меняться в зависимости от увеличения знаний о Природе. Каждая***

математическая модель строится на основе математических соотношений, которые, в свою очередь, строятся на основе арифметических и логических выражений.

В этом определении, к которому мы будем обращаться на протяжении всей нашей книги, в свою очередь, требуется определить ключевое понятие ***Математического соотношения как математического объекта, дающего количественное (численное) значение чего либо, – это могут быть уравнения, неравенства, таблицы и графики***.

К математическим соотношениям также относим и арифметические и логические выражения[1], являющиеся их первичными формами.

Важно подчеркнуть, что по своему существу понятие ***Математического моделирования*** естественно более широкое, чем понятие ***Математической модели***, поскольку включает в себя ***ряд важных математических технологий (вопросы корректности, вычислительные методы, алгоритмизация и ряд других*****), а также** множество ***Компьютерных технологий,*** и подробнее мы поговорим об этом далее при обсуждении триады А.А. Самарского.

Изложенная концепция Математического моделирования, конечно, является очень общей, и её применение в полном объёме отдельным исследователем или инженером при решении какой-либо задачи, в общем, не характерно и является, как правило, функцией научной группы или коллектива исследователей. Но с позиций тех вопросов, которые мы обсуждаем в нашей книге, описанная концепция математического моделирования весьма и весьма важна.

---

[1] Логическое выражение принимает значения «истина» или «ложь», которые называют логическими числами. Как правило, используется в совокупности с арифметическими выражениями. Подробнее об этом – далее.

В параграфе 2.3 мы только прикоснулись к тому удивительному инструментарию, с помощью которого описываются многие явления Природы и строятся оценки для определения характеристик машин, разного рода систем и технологий. При этом мы увидели, что этот инструментарий в гидроаэродинамике представляется дифференциальными уравнениями. Но это же почти всегда имеет место и в описании явлений всего окружающего нас изменчивого мира Природы. Сами такие уравнения подразделяются на два класса: первый – это обыкновенные дифференциальные уравнения, то есть дифференциальные уравнения, содержащие обыкновенные производные искомых функций, тогда как второй класс – это дифференциальные уравнения в частных производных, то есть дифференциальные уравнения, содержащие частные производные искомых функций.

Выше мы привели уравнения Эйлера и Навье–Стокса, которые являются уравнениями в частных производных. Приведем еще примеры

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (2.19)$$

– это уравнение колебания прямоугольной мембраны со сторонами a и b, по-видимому, первое дифференциальное уравнение в частных производных, опубликованное в научных изданиях. Уравнение (2.19) было получено Эйлером. Здесь неизвестная функция $u(t,x,y)$ есть функция трех переменных t, x и y. А вот такое уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + a(t)\frac{du}{dt} + b(t)u = f(t)$$

с неизвестной функцией $u(t)$ есть обыкновенное дифференциальное уравнение. Таким образом, отсюда нетрудно сделать вывод, что подавляющее большинство процессов в природе и во всех машинах и системах, созданных человеком, описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, поскольку наш мир трехмерен, да и очень многие процессы нестационарные, то есть развиваются во времени.

Исторически все дифференциальные уравнения в частных производных относили к уравнениям математической физики, одного из наиболее трудных и одновременно важнейших разделов математики. Таким образом поступаем и мы, также относя к математической физике все рассмотренные нами в этом разделе уравнения. И здесь возникает проблема – практически все рассмотренные нами уравнения не разрешимы аналитически, то есть их решения не представимы в виде формул. Остается единственный способ найти решения рассматриваемых уравнений – с помощью применения каких-либо численных методов.

И здесь мы вновь должны обратиться к концепции Математического моделирования, рассмотренной выше, а именно к её блоку III, в рамках которого изучается проблема перехода от непрерывной математической модели к модели дискретной.

Существо этого перехода – в замене, например, непрерывной функции её приближением в виде табличной функции, о чем как раз и говорилось при рассмотрении упомянутого блока III концепции математического моделирования. Там же мы рассмотрели и задачу о такой замене на примере вычисления интеграла (2.17) от функции $\sin x/x$. При этом с помощью определения табличной функции $f_i \equiv f(x_i) = \sin x_i / x_i$ $(i=0,1,\ldots,n)$, используя формулу (2.18), мы построили приближающую интеграл при каждом n последовательность чисел S_n, которая, как мы убедились, при $n \to \infty$ стремится к точному значению величины интеграла J.

Теперь обратимся к рассмотрению проблем, связанных с приближенным решением дифференциальных уравнений, начав со случая простейшей краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Задачи инженерной практики, связанные с такими уравнениями, встречаются повсеместно практически в каждой из отраслей инженерного и научного знания.

Итак, так называемая краевая задача первого рода[1] имеет вид:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),\ x \in [a,b], \quad y(a) = A, \quad y(b) = B,$$

где функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ заданы на $[a,b]$, также как и числа A и B. Основная идея, лежащая в основе подхода к решению такой задачи, состоит в замене искомой непрерывной функции $y(x)$ некоторой приближающей её табличной функцией y_i, $i=0,1,2,\dots,n$. Возникает вопрос, а как разыскивать такую табличную функцию y_i? Говоря иначе, как построить саму эту табличную функцию?

Идея, которая здесь используется, восходит к создателям метода бесконечно малых, к Ньютону и Лейбницу, и впервые, по-видимому, была сформулирована учеником Ньютона Тейлором и была реализована Эйлером в его численном методе решения задачи, которую в будущем назовут задачей Коши и которая состоит в так называемом конечно-разностном представлении производных.

При этом вполне очевидно, что для построения приближающей табличной функции y_i нужно использовать само исходное уравнение. А для этого мы должны перейти от производных, входящих в это

[1] В краевых задачах второго и третьего рода граничные условия имеют несколько иной вид.

уравнение, к их некоторым ***конечно-разностным*** аналогам, то есть как раз и реализовать переход от непрерывной модели к её дискретному аналогу. Для этого, прежде всего, мы должны разбить на малые интервалы сам промежуток $[a, b]$. Полагая, что число таких интервалов – шагов равно n и выбирая эти интервалы равноотстоящими, то есть положив величину шага $\Delta x=(b-a)/n$, можем построить такие приближенные формулы для производных на n интервалах, называемых конечно-разностными приближениями:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_i \approx \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2\Delta x}, \quad i=1,2,...,n-1;$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i \approx \frac{1}{\Delta x}\left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{i+1} - \left.\frac{dy}{dx}\right|_i\right) = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x} - \frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}\right) = \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{\Delta x^2},$$
$$i=1,2,...,n-1.$$

Первая из приведенных формул отражает аппроксимацию первой производной, тогда как вторая – аппроксимацию второй производной, основанную на аппроксимации первой производной. Заметим, что производные построены на так называемом трехточечном шаблоне $[i-1, i, i+1]$, вместе с тем для приближения первой производной можно выбрать и такие формулы:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_i \approx \frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}, \quad i=1,2,...,n; \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_i \approx \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}, \quad i=0,1,2,...,n-1.$$

Процедура подстановки вместо производных их конечно-разностных приближений в исходное уравнение называется аппроксимацией этого уравнения. В итоге получаем такой ***дискретный***

аналог исходного уравнения[1] относительно табличной функции y_i, $i=0,1,2,...,n$:

$$y_0 = A, \quad a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = d_i; \quad i = 1,2,...,n-1; \quad y_n = B.$$

Вполне очевидно, что эта система алгебраических уравнений требует от нас нахождения каждого из её неизвестных y_i или, говоря несколько иначе, определения ***всех*** компонент искомого вектора $\{y_i\}\Big|_{i=1}^{i=n-1}$.

Конечно же, вычислительные возможности конца XIX века и первой половины XX века не давали исследователям возможности находить решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений для более-менее значимых величин n числа дроблений промежутка, или, что-то же самое, для достаточно малых величин шага Δx.

К вопросу о необходимых объёмах вычислений мы вернемся в разделе 3, а сейчас остановимся на том, как только что использованная методика может быть применена при решении дифференциальных уравнений в частных производных. В этом случае задача оказывается значительно более сложной. И эта сложность обусловлена как сложностью самих объектов в виде таких дифференциальных уравнений, так и в общем случае некоторой сложностью корректного приближения производных, входящих в эти уравнения. Покажем существо имеющихся здесь подходов на простейшем, но в тоже время характерном примере. Для этого возьмем уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ в } \Omega. \tag{2.20}$$

[1] Коэффициенты этой системы уравнений вычисляются по формулам: $a_i = 2 - p_i \Delta x, \quad c_i = 4 - 2\Delta x^2 q_i,$ $b_i = 2 + p_i \Delta x, \quad d_i = 2\Delta x^2 f_i; \quad i = 1,2,...,n-1.$

Здесь Ω есть некоторая область на плоскости (x, y), например, прямоугольник. Само уравнение (2.20) носит имя французского математика и механика С.Д. Пуассона (1781–1840 гг.). К уравнению (2.20), которое записано относительно искомой функции $u(x,y)$, задаются краевые условия на границе области $\partial\Omega$:

$$u|_{\partial\Omega} = g(x,y). \tag{2.21}$$

Попутно отметим, что уравнением (2.20) описываются многие стационарные физические процессы, например, поле температуры, поле потенциала скорости, поле и давления в гидродинамике в ряде случаев и другие процессы.

Выше мы уже говорили о тех проблемах, с которыми столкнулись ученые и инженеры при попытках решения задач математической физики. При этом следует назвать имена В. Ритца (1878–1909 гг.), И.Г. Бубнова (1872–1919 гг.) и Б.Г. Галёркина (1871–1945 гг.). Подробнее о вкладе этих ученых см. в Приложении.

Методы, разработанные этими учеными, позволили с течением времени решать невероятно трудные задачи. Однако на первых этапах, когда не было не только вычислительных машин, но и развитых вычислительных методов, возникающие задачи пытались решать с помощью простейших подходов.

Итак, покажем это на примере нашей задачи (2.20, 2.21), предполагая для простоты, что область Ω – прямоугольник ($0 \le x \le a$; $0 \le y \le b$) с положительными значениями a и b. Построим в области прямоугольную сетку: $\{x_i, y_j\}$ с равномерными шагами по x и y: $\Delta x = a/N$, $\Delta y = b/M$, где N и M – заданные положительные числа, определяющие число расчетных точек внутри области. При этом параметры i и j для каждой точки $\{x_i, y_j\}$ принадлежат диапазонам [0:N] и [0:M] соответственно. Теперь построим некоторую табличную функцию[1] $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ ($0 \le i \le N$, $0 \le j \le M$), значения которой в расчетных точках внутри области предстоит найти в процессе решения задачи. Отметим, что такие точки называют узловыми.

Здесь крайне важно отметить, что таким образом мы заменили нашу искомую непрерывную функцию $u(x,y)$ табличной u_{ij} ($0 \le i \le N$, $0 \le j \le M$). Вопрос о разыскании самой табличной функции u_{ij} решается совершенно аналогично тому, как мы только что показали на примере обыкновенного дифференциального уравнения. Ясно, что для этого нам необходимо построить соотношения для определения этой табличной функции во внутренних узловых точках $\{x_i, y_j\}$ ($0<i<N$, $0<j<M$) области Ω. Теперь вспомним, как выше мы записывали представление обыкновенной производной некоторой функции $y(x)$ в данной точке x

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x},$$

где, как мы помним, символом Δx обозначено приращение аргумента x. В продолжение этого определения мы можем записать и выражения для частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ функции $u(x,y)$ в некоторой точке (x,y):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta y}.$$

где Δx и Δy – шаги построенной нами ранее «сетки»: $\{x_i, y_j\}$ ($0<i<N$, $0<j<M$). Очевидно, что эти шаги играют роль приращения соответствующих аргументов функции $u(x,y)$.

[1] Это та самая табличная функция u_{ij}, заменяющая искомую $u(x,y)$, о которой мы говорили, описывая блок III Концепции математического моделирования, посвященный переходу от непрерывных моделей к дискретным.

Для сетки $\{x_i, y_j\}$ с равномерными шагами Δx и Δy, при их достаточно малых значениях, мы можем приближенно записать такие выражения для производных искомой табличной функции:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y},$$

которые, как и ранее, принято называть конечно-разностными. Теперь, на основе построенной сетки $\{x_i, y_j\}$ в её строго внутренних узлах определим так называемый четырехточечный шаблон, то есть совокупность точек, соседствующих с центральной точкой, которую назовем расчетной (рис. 2.3). На определенном таким образом шаблоне, используя предыдущие формулы для производных первого порядка, построим производные второго порядка (по аналогии с предыдущими формулами для производных первого порядка):

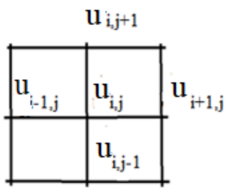

Рис. 2.3 Четырёх-точечный шаблон

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2}. \qquad (2.22)$$

Как строятся эти производные, покажем на примере первой производной в (2.22):

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \approx \frac{\partial u_{i+1,j}/\partial x - \partial u_{i,j}/\partial x}{\Delta x} = \frac{(u_{i+1,j} - u_{i,j})/\Delta x - (u_{i,j} - u_{i-1,j})/\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}.$$

Подчеркнем еще раз, что приближенные производные (2.22) мы построили исключительно в строго внутренних точках нашей сетки, то есть в точках с номерами, удовлетворяющими соотношениям: $0 < i < N$,

$0 < j < M$. Теперь остается подставить соотношения (2.22) в исходное уравнение (2.20), после чего получаем такую систему *конечно-разностных* уравнений:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \approx f_{i,j},\ i = 1,2,\ldots,N-1;\ j = 1,2,\ldots,M-1.$$

Здесь символом $f_{i,j}$ обозначено значение правой части исходного уравнения, вычисленное во внутренних точках сетки, то есть

$$f_{i,j} = f(x_i, y_j).$$

Упростим полученную систему уравнений, положив равными шаги построенной сетки, то есть выберем $\Delta x = \Delta y = h$ и заменим символ «$\approx$» на символ «=», полагая, что мы при данном шаге получим удовлетворительную точность. Тогда последняя система уравнений принимает особенно простой вид:

$$u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = h^2 f_{i,j};\ i = 1,2,\ldots,N-1;\ j = 1,2,\ldots,M-1. \quad (2.23)$$

Система линейных уравнений (2.23) должна быть дополнена соотношениями (2.21) на границе области. Таким образом, мы получаем систему уравнений, которая позволяет определить $(N-1)\times(M-1)$ значение искомой табличной функции $u_{i,j}$. Как мы уже поясняли, эта табличная функция есть приближение к искомому решению $u(x,y)$ задачи для уравнения Пуассона. И естественно, чем меньшими мы выберем шаги Δx и Δy, то есть чем точнее построим приближение производных (2.22) в нашем уравнении, тем ближе будет наше решение к точному.

Итак, мы указали способ, с помощью которого осуществляется переход от исходной задачи к её конечно-разностному аналогу, что, как указывалось, отвечает блоку III концепции математического моделирования. Подчеркнем еще раз, что математических технологий, с помощью которых может осуществляться такой переход в различных задачах, имеется достаточно много, и мы остановились на одном из простейших, используемых при решении дифференциальных уравнений в частных производных. В Приложении мы приводим так называемый метод конечных элементов, как мы увидим, гораздо более эффективный в сравнении с использованным выше методом конечных разностей.

Здесь же уместно указать и на то, что система линейных уравнений (2.23) даже при относительно малых N и M оказывалась практически трудно разрешимой с использованием наиболее совершенных вычислительных средств первой половины XX века, не говоря уже о веке XIX. Но об этом подробнее мы поговорим далее в 3 разделе.

А теперь вновь обратимся к историческому опыту, опираясь на воспоминания о деятельности выдающихся отечественных ученых и на их вклад в важнейшие проекты, которые реализовывались в СССР. Приведем такой более чем характерный пример. К началу 1948 года советская атомная бомба была практически сконструирована. Как известно, в этой работе принимали участие такие выдающиеся физики как Андрей Дмитриевич Сахаров (1921–1989 гг.), Яков Борисович Зельдович (1914–1987 гг.), Юлий Борисович Харитон (1904–1996 гг.), Лев Давидович Ландау (1908–1968 гг.). Работами руководил Игорь Васильевич Курчатов (1902–1960 гг.), на семинарах у которого обсуждались все ключевые работы по атомному проекту. И на одном из таких семинаров в начале 1948 г. встал вопрос о расчете мощности взрыва сконструированной атомной бомбы. Обсуждалась модель, построенная в Институте физических проблем под руководством Л.Д. Ландау.

Модель представляла собой систему нелинейных уравнений, аналитическое решение которой было невозможно. Присутствующий на семинаре молодой член-корреспондент АН СССР Андрей Николаевич Тихонов (1906–1993 гг.) предложил провести прямой численный расчёт системы уравнений в частных производных *конечно-разностным методом*. В ответ Л.Д. Ландау назвал такое решение задачи научным подвигом! Вот так крупнейшие ученые в середине XX века оценивали начало перехода к вычислительным технологиям! При этом ведущие отечественные ученые сразу же увидели в таких технологиях большие возможности для решения задач науки и промышленности.

Этот пример показывает, что еще в середине прошлого века проблематичными были сами подходы к построению вычислительных методов для решения задач математической физики, хотя основополагающие пути преодоления трудностей в значительной мере были решены трудами математиков и механиков в первой четверти XX века.

Здесь же отметим, что научную группу, которая состояла примерно из 40 человек и осуществляла собственно расчеты по определению мощности ядерного заряда, используя трофейные клавишные вычислители «Мерседес», возглавлял 29-летний кандидат наук, будущий академик и автор Концепции Математического моделирования А.А. Самарский.

С тем, чтобы показать читателю драматическую важность концептуального взгляда на Математическое моделирование, приведем еще один пример. Этот пример показывает, что проблема математической корректности постановки задачи, названная в блоке II, во многих задачах более чем важна. В частности, это касается существования решений задач в том или ином классе функций, что крайне важно, и далеко не всегда эту проблему можно пропускать, особенно в части рассмотрения набирающих все больший масштаб задач оптимизации.

Рассматриваемая нами задача восходит к работе Рэлея [12] от 1918 г., которая была первой в истории науки и инженерного дела решенной задачей неклассического вариационного исчисления (задачей оптимизации[1]) [7; 9]. Это был выдающийся научный результат, который, к сожалению, мало известен специалистам по решению оптимальных задач. Отметим, что решение этой задачи оптимизации было повторно получено через 50 лет после публикации результатов Рэлея [13].

Итак, рассмотрим следующую вариационную задачу – найти минимум интегрального функционала[2]:

$$J = -\int_{\Omega} p \mathrm{d}\Omega, \tag{2.24}$$

при следующих условиях-ограничениях:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} - hV\right) + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{2.25}$$

$$p|_{\partial\Omega}=0, \tag{2.26}$$

$$h \geq h_0. \tag{2.27}$$

Уравнение (2.25) записано в безразмерном виде и носит имя Рейнольдса. Здесь Ω – некоторая прямоугольная область с соответствующими размерными величинами продольной L_x и поперечной L_y длинами, то есть отвечающий им параметр удлинения

[1] Отметим, что Рэлей рассматривал одномерную (плоскую) задачу.

[2] Функционалом в математическом анализе называют отображение (обобщение понятия функции) из некоторого пространства функций в числовую ось. В рассматриваемом случае это пространство непрерывных функций p(x,y) в области Ω.

есть: $\gamma=Lx/Ly$, и в одномерной задаче, очевидно, $\gamma=0$. Также величина V – постоянная (скорость скольжения в направлении оси x), параметр h_0 – также заданная постоянная, и, наконец, $\partial\Omega$ – граница области.

Таким образом, требуется найти экстремум функционала (2.24) при ограничениях (2.25–2.27). Для простоты опустим чисто математические проблемы принадлежности функции давления $p(x,y)$ и $h(x,y)$ тем или иным классам функций, связанным с решениями дифференциального уравнения (2.25), указав только на то, что функция $p(x,y)$ должна (как указано в примечании выше) разыскиваться в классе непрерывных функций, а функция $h(x,y)$ должна разыскиваться в классе кусочно-непрерывных функций. Сформулированная задача имеет простое и изящное решение, которое в силу вида функции $h(x,y)$ называют «карманом Рэлея» [7; 10].

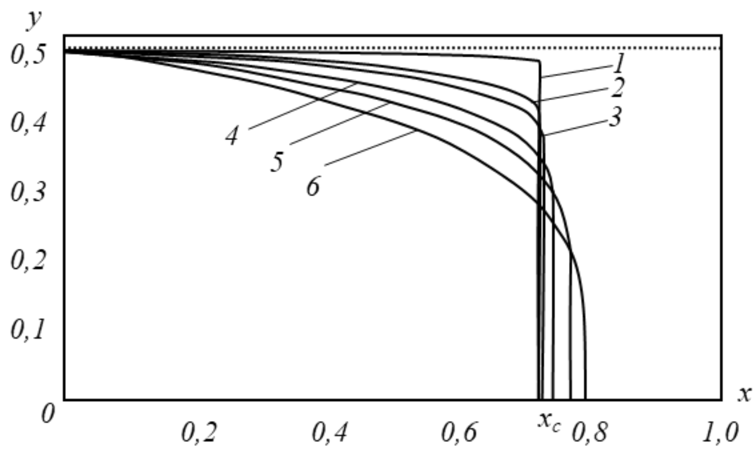

Рис. 2.4 Проекции линии разрыва для различных значений параметра γ.

На рис. 2.4 представлены проекции линии разрыва на плоскости (x,y) для различных удлинений значений параметра γ =0.1 (1), 0.25 (2), 0.333 (3), 0.5 (4), 0.75 (5), 1 (6). Как видим, с уменьшением параметра γ линия разрыва все более и более приближается к боковой границе. При этом она выходит на искусственно введенное ограничение, связанное с чисто вычислительными проблемами[1], о которых здесь отметим только то, что линия разрыва не может бесконечно близко подходить к боковой границе. На рис. 2.5 приведены графики полей давления в различных сечениях. Слева графики распределения давления по оси x, справа – по y. Характер поля давления в центральной части полностью отвечает характеру решения одномерной задачи [13], то есть при y=0 или вдоль по оси x, как мы видим на левом рисунке 2.5. Заметим, что наличие «кармана» прослеживается и на правом рисунке, где на боковой стенке также рвутся производные, но уже производные $\partial p/\partial y$.

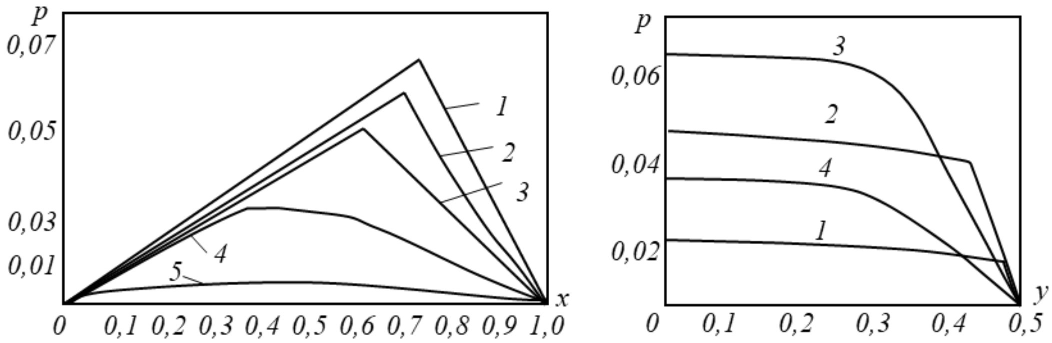

Рис. 2.5 Распределение давления при γ =0.5. Слева – сечения при y=const, справа – при x = const.

Итак, полученное нами решение является кусочно-разрывным для функции профиля $h(x,y)$ и кусочно-гладким для функции давления $p(x,y)$ и вполне укладывается в классические рамки.

Теперь совсем незначительно поменяем постановку задачи. А именно будем полагать, что на боковых границах (на внешних границах $\partial\Omega_0$ области Ω) давление задано:

$$p\,|_{\partial\Omega_0} = 0\,, \tag{2.28}$$

[1] При бесконечно близком расположении линии разрыва к границе невозможно построить удовлетворительную разностную схему для уравнения (2).

где символом $\partial\Omega_0$ обозначены участки внешних границ $\partial\Omega_0=\{0\leq x\leq 1,\ y=\pm 0.5\}$, тогда как на внутренних границах $\partial\Omega_1=\{-0.5\leq y\leq 0.5;\ x=0$ и $-0.5\leq y\leq 0.5;\ x=1\}$ выполняются условия периодичности

$$p(0,y)=p(1,y)\quad -0,5\leq y\leq 0,5\,. \tag{2.29}$$

Таким образом, краевая задача (2.24, 2.28, 2.29) определена. И более в постановке вариационной задачи мы ничего не меняем. Но оказывается, что на решении вариационной задачи такое изменение граничных условий сказывается драматическим образом – ***в задаче отсутствует классическое кусочно-гладкое решение*** на что указывалось в работах крупных современных математиков [14]. Таким образом, в рамках классической постановки ***решение найти невозможно*** *и требуется переформулировка постановки задачи*. Не имея возможности рассмотреть задачу подробно, приведем её решение, а именно функцию профиля $h^*(x,y)$, которая имеет бесчисленное множество разрывов и которую нужно рассматривать в классе измеримых функций (рис. 2.6).

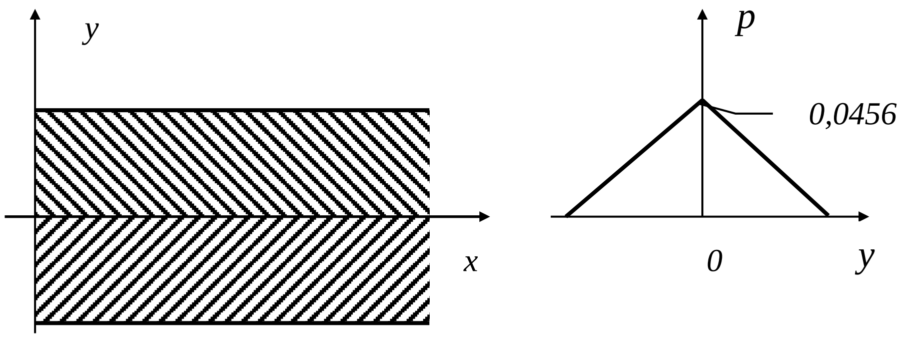

Рис. 2.6 Оптимальный шевронный профиль

Укажем, что из системы необходимых условий следует существование двух решений, из которых приведем то, которое дает наибольшее значение функционала. Такое решение реализуется в виде «шевронного» профиля [7], качественная форма которого приведена на рис. 2.6. Это решение, которое назовем симметричным, отвечает величине расхода $Q=0$ и соответствует шевронному профилю с такими постоянными параметрами. Значение функционала (8) равно J=0,02279.

Вывод, который можно сделать исходя из двух рассмотренных задач оптимального проектирования, заставляет нас задуматься. Действительно, по какой причине в задаче Рэлея с краевыми условиями первого рода мы получили «хорошее классическое», то есть кусочно-непрерывное решение, а в случае условий периодичности кусочно-непрерывного решения нет, и мы должны переформулировать задачу!?

Это крайне важный вопрос, поскольку востребованность оптимальных решений непрерывно растет и очень многие процессы как раз и описываются такими классами эллиптических уравнений, как уравнение (2.25). И здесь мы вновь подчеркиваем важность сугубо математических вопросов, без которых нам просто не ответить на многие вопросы при решении интересующих как науку, так и индустрию задач. И эти вопросы не имеют ничего общего с вычислительными проблемами[1] и тем более с компьютерными технологиями.

2.6. Заключение к разделу 2

Итак, в настоящем разделе мы кратко рассмотрели ретроспективу зарождения и развития естественнонаучного знания, на основе которого и сформировался предмет рассматриваемого в данном разделе Математического моделирования. При этом мы старались выявить глубинную связь важнейших сегментов этого знания – физико-механики и математического знания. Еще раз подчеркнем, что основополагающее начало этому подходу в изучении законов Природы и наполнении их математическим фундаментом положили великие математики Л. Эйлер и

[1] На самом деле появление таких решений, как на рис. 2.6, порождает вычислительные проблемы, но они имеют совершенно иную природу, чем вопросы построения вычислительных методов, и обусловлены наличием бесчисленного числа разрывов у оптимального решения h^*.

Ж.Л. Лагранж, что особенно наглядно выявилось при построении Эйлером уравнений движения идеальной жидкости и построении Лагранжем вариационных принципов механики.

Этот раздел мы в большой мере посвятили и истории изучения мира Природы, а это прямо относится и к истории естественнонаучного знания. И еще раз подчеркнем, что здесь, конечно, главную роль играют Математика и Физико-механика – фундамент естественнонаучного и инженерного знания, где гений Л. Эйлера и Ж.Л. Лагранжа сыграли выдающуюся роль.

После Эйлера началось стремительно развитие физико-математических наук, которые создавали фундамент будущего масштабного становления и развития Математического моделирования. Действительно, физические законы – основа постановки задач, и их математическая реализация в виде дифференциальных уравнений математической физики в значительной мере уже были описаны и рассмотрены или изучались ведущими учеными в XVIII–XIX веках.

Инструментарий методов вычислений также был очень сильно продвинут уже к концу XIX века, а начало XX века ознаменовалось важнейшими результатами В. Ритца и наших соотечественников И.Г. Бубнова и Б.Г. Галёркина в части развития методов решения дифференциальных уравнений, о чем уже говорилось выше. В те же времена появились и первые работы по оптимизации в технических системах – напомним об упомянутой работе Рэлея от 1918 г. Мировой науке не хватало одного – рождения эффективных вычислительных средств, что и случилось в аккурат в самой середине XX века.

Итак, с некоторой долей условности, технологиям Математического моделирования, если не концептуально как некоторой системе, а как ряду основополагающих технологий, уже около полувека. Но тем не менее до настоящего времени в научном и инженерном сообществе не утвердилось глубокое понимание той фундаментальной научной основы, на которой базируется Концепция Математического моделирования.

Подтверждением этому являются проходящие через ряд документов и являющиеся в них ключевыми такие понятия как Компьютерное моделирование и Компьютерная модель, которые являются неверными по самому своему смыслу. При этом они противоречат самому существу Концепции Математического моделирования и определению понятия Математической модели, разработанной выдающимися отечественными учеными, о чем мы говорили выше. Сами эти понятия приводят к путанице, например, учащиеся могут ошибочно интерпретировать данные термины как способность компьютера к непосредственному моделированию, то есть на первый план выводятся чисто технические вопросы вычислений, тогда как основополагающие фундаментальные вопросы математики постановки задач остаются в стороне.

Некорректны и часто используемые определения математической модели, в которых ***она определена как модель, содержащая сведения об объекте моделирования в виде математических символов и выражений***.

Поясним, что нужно начинать с рассмотрения понятия ***Арифметического выражения*** (а только о нем и можно здесь говорить), которое определяется как ***совокупность функций, переменных, чисел и знаков арифметических операций, разделённых круглыми скобками***. Заметим попутно, что, также как арифметическое выражение, определяются, как указано ранее, и ***логические выражения***, с той лишь разницей, что в них используются ***логические функции, логические***

«числа» (1 и 0, «истина» и «ложь») и переменные (принимающие значения «истина» или «ложь»), а также символы логических операций, разделённых круглыми скобками. Приведем, в частности, логические операции, используемые в первых версиях языка Fortran

Нет	**и**	**или**	**Эквив**
.NOT.	.AND.	.OR.	.EQV.

Отметим также, что простейшими логическими выражениями являются арифметические отношения с символами операций отношений

$$>, <, \geq, \leq, \neq.$$

Например, отношение $x>0$ истинно только при положительных и не равных нулю значениях x.

Подчеркнем, что именно на основе арифметических и логических выражений строятся ***математические соотношения***, то есть уравнения разного вида и неравенства, как мы указали в параграфе 2.5, где и дано определение ***Математической модели***. Повторим это определение еще раз в силу его особой важности: ***Математической моделью назовем целостную (единую) совокупность взаимосвязанных математических соотношений, обеспечивающих полное и корректное решение проблемы вычисления характеристик явлений Природы, разработки любого класса машин, механизмов, систем и технологий с требуемой точностью.***

Содержание математической модели может меняться в зависимости от увеличения знаний о Природе. Каждая математическая модель строится на основе ***математических соотношений,*** которые, в свою очередь, строятся на основе ***математических и логических выражений.***

В связи с последним отметим, что в инженерной, да и в научной практике, используются понятия:

Математическая модель;

Цифровая модель;

Компьютерная модель;

Электронная модель.

Сразу же укажем, что, по нашему мнению, предпочтительными и корректными являются первые два наименования моделей при всем их значительном различии. Попробуем это пояснить, начав с того, что первична именно ***Математическая модель*** как совокупность математических (количественных) соотношений, дающих способ получить численные характеристики объекта.

Цифровая же модель как раз и есть итог реализации этого способа, то есть, вообще говоря, продолжение Математической модели в том смысле, что она является, как правило, ее вычислительной реализацией (буквально переводом математических соотношений в цифры).

В то же время понятия Компьютерной и Электронной модели по своему смыслу оставляют за скобками важнейшее – существо всех математических построений модели, и сами эти построения (как основополагающие фундаментальные, так и вычислительные), выводя на первый план сугубо технические вопросы, связанные с компьютерными технологиями. В первом случае это компьютер, то есть инструмент, во втором – его электронная «начинка».

В продолжение сказанного следует также отдельно указать на несостоятельность понятия Компьютерное моделирование, особенно в части неясности того, ***на каком этапе здесь рассматриваются и рассматриваются ли вообще основополагающие вопросы математической постановки задачи и ее анализа***?

При этом отсутствует корректное определение понятия Компьютерное моделирование и определение тех блоков – этапов, составляющих это понятие, как это имеет место в определении Концепции Математического моделирования. Но ведь мы уже убедились в важности, например, названных выше вопросов существования решений задач, их единственности и так далее. Эти вопросы являются критически важными, например, при решении получающих все большую значимость задач оптимального проектирования и многих других проблем.

Действительно, проблемность понятия Компьютерное моделирование иллюстрируется примером, приведенным в конце параграфа 2.5, где рассматривается задача оптимального проектирования с условиями периодичности. Совершенно неясно, на каком шаге – этапе в рамках понятия Компьютерное моделирование рассматривается чисто математическая проблема существования решения в данной задаче. Более того – причем здесь компьютеры при рассмотрении важнейшей математической проблемы?

Таким образом, ряд понятий и терминов, встречающихся на практике, требуют переосмысления и доработки или переработки и должны быть приведены в согласие с Концепцией Математического моделирования. И главное здесь в том, что в проблемных понятиях Компьютерное моделирование и Компьютерная модель не содержатся основополагающие математические вопросы постановки и анализа самих задач.

Действительно, вновь обратимся к понятию Компьютерная модель (электронная модель), присутствующему в ряде документов, которое определяют следующим образом: ***Модель, выполненная в компьютерной (вычислительной) среде и представляющая собой совокупность данных и программного кода, необходимого для работы с данными.***

Это понятие с долей некоторой условности можно трактовать только как компьютерный (электронный) образ, полученный на основе математической модели, на что справедливо указывают сами разработчики этого понятия, отсылая к приведенному ниже примечанию.

Примечание — В основе компьютерной модели лежит математическая модель, реализованная в виде программного кода, и данные, определяющие конкретный объект моделирования. Для применения компьютерной модели в процессе моделирования необходимо *использовать программное обеспечение компьютерного моделирования и вычислительной техники* [ГОСТ Р 57700.22–2020, пункт 3.1.3].

Это примечание можно было бы рассматривать как актуальное, если корректно пояснить, как понимать текст: «…использовать программное обеспечение ***компьютерного моделирования*** и вычислительной техники» (здесь, по-видимому, имеется в виду применение в первую очередь САЕ-систем и собственно компьютеров). Само это примечание содержит совершенно верное первое предложение и путающее читателя второе – как понимать текст «Для применения компьютерной модели в процессе моделирования…»?

При этом в концепции Математического моделирования все разложено «по полочкам»!

Действительно, сначала речь идет о ***постановке задачи*** (где компьютеров нет), следующий шаг трансформирует рассматриваемую задачу в ***численную форму*** (где компьютеров также нет). Затем разрабатывается ***алгоритм*** реализации численного метода (компьютеров вновь нет), следующим шагом на основе алгоритма пишется ***программа*** (сегодня чаще всего используются CAE-системы) (даже здесь еще не появляются компьютеры как инструмент для реализации программ и анализа результатов).

Приведенная последовательность шагов – это в чистом виде схема А.А. Самарского, которая рассмотрена выше в данном разделе:

Модель (Математическая модель) – Алгоритм – Программа.

Также в связи со сказанным отметим, что названные выше выдающиеся ученые, отцы-основатели идеологии применения ЭВМ в нашей стране, как правило, не пользовались терминами Компьютерное моделирование и Компьютерная модель. В частности, А.А. Самарский писал: «Называют это направление по-разному: ***«вычислительный эксперимент», «математическое моделирование», «математический эксперимент»*** и т. д. Однако, независимо от названия, суть здесь одна: ***на основе математической модели с помощью ЭВМ проводится изучение устройств и физических процессов***, «проигрывается» их поведение в различных условиях <…>» [1].

Отметим при этом, что сами термины Компьютерное моделирование и Компьютерная модель имеют своим источником однобокий перевод с английского языка понятия «Computer simulation», которое переводится (при точном переводе) не только как Компьютерное моделирование, но и как Численное моделирование и, соответственно, не как Компьютерная модель, а как Численная модель. При этом вполне очевидно, что математическая модель, реализованная на ЭВМ с использованием вычислительных методов, становится численной моделью.

Таким образом, проблемные понятия Компьютерное моделирование и Компьютерная модель должны быть исключены из научно-технического оборота (словаря), и, по нашему мнению, для решения текущих инженерных и естественнонаучных задач достаточно употреблять термины «математическая модель» и «численная модель».

В завершении остановимся еще на таком представляющем особую важность обстоятельстве. Мы уже отмечали, что само понятие Математическое моделирование, вообще говоря, имеет очень долгую и даже, можно сказать, многовековую историю. Конечно, во времена Ньютона и Эйлера, Лагранжа и Гаусса это понятие вообще не употреблялось учеными и передовыми инженерами, но все названные гении вполне понимали, что разрабатываемые ими математические методы, подходы в математических построениях и математические объекты служат одной великой цели – описать и объяснить окружающий нас мир, мир Природы.

Возьмем закон Ньютона – закон всемирного тяготения. Ньютон, продолжая работы И. Кеплера (1571–1630 гг.) и Р. Гука, построил закон взаимодействия планет Солнечной системы, который позволил вычислить силы притяжения планет к Солнцу. А уравнения движения жидкости, хотя и невязкой, и несжимаемой, построенные великим Эйлером, – это был невероятный прорыв, гигантский шаг вперед в моделировании движения сплошной среды, обладающей свойством текучести. И вряд ли найдутся те, кто будет возражать, что названные великие достижения способствовали более глубокому пониманию людьми законов нашего мира.

И, конечно, возможности Математического моделирования в те века были крайне ограничены. И объяснение этого заключается в слабости развития базового естественнонаучного знания – математики и физико-механики. Но если мы обратимся к приведенным нами в параграфе 2.5 блокам Концепции Математического моделирования, то мы увидим, что все четыре первых блока были достаточно развиты, а пятый блок, хотя и находился в зачаточном состоянии, но интенсивно развивался уже со времени Ньютона.

Действительно, не будем голословны:

I блок математической постановки задачи может быть представлен тем же законом всемирного тяготения Ньютона или его законами динамики, а это XVII век;

II блок анализа математической корректности построенной математической модели, описывающей нашу задачу, активно развивался уже со времени самого Ньютона и его учеников и получил мощный импульс в XVIII веке с приходом в науку Эйлера и Лагранжа;

III блок перехода от непрерывной математической модели задачи к модели дискретной интенсивно развивался, начиная с трудов Ньютона; достаточно упомянуть его метод приближения функций, в котором используются разностные отношения, и методы приближенного вычисления интегралов – квадратурные формулы Ньютона–Котеса; а также укажем на метод Эйлера – метод численного решения задачи интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка, задачи, которую в будущем назовут задачей Коши;

IV блок анализа математической корректности вновь полученной дискретной задачи – с самого начала появления численных методов, со времен Ньютона и его учеников, он составлял основу важнейшего блока математики – вычислительной математики, где ядром были проблемы точности вычислений, а значит близости приближенного решения к точному, прямо связанные с корректностью в постановке дискретной задачи; вспомним наш пример приближенного вычисления интеграла (2.17);

V блок написания алгоритма для дискретной задачи, то есть последовательности вычислительных шагов, и его перенос на компьютер – программирование требует отдельного рассмотрения в каждой из двух его составляющих, то есть ***алгоритмизации*** задачи (обозначим данный ***подблок V.1***) и реализации алгоритма в виде ***программы*** для ЭВМ (обозначим ***V.2***), при этом сразу же укажем, что очевидно можно говорить в ретроспективном смысле только об ***алгоритмизации***, которая берет начало, опять-таки, от Ньютона и его учеников, примером чего служит формула (2.18) для приближенного вычисления интеграла (2.17) на основе метода трапеций; и ни о каком программировании говорить мы не можем, хотя в XIX веке были попытки создания механических вычислителей и программ для них.

И здесь мы несколько отступим от нашего изложения и обратимся к следующему обстоятельству. Все рассмотренные четыре «с половиной» блока по своему существу являются опирающимися на естественнонаучное знание – математику и физико-механику, причем на обе отрасли опирается только первый блок, тогда как остальные имеют своим фундаментом только математическое знание. Это крайне важно понимать в контексте того, что с непрерывным углублением понимания нашего мира его описание будет все более усложняться, что, естественно, будет требовать все более глубоких математических, да и вообще естественнонаучных знаний.

Сказанное ни в коей мере не отменяет высочайшую значимость ***шестого блока*** Концепции математического моделирования – блока отладки программ, получения результатов и их анализа. При этом мы должны понимать его прямое назначение как ***инструмента численного решения*** всего бесконечного множества задач человеческой практики.

Сегодня мы являемся свидетелями непрерывного расширения круга задач этой практики, где гармония в сочетании применения Математики и Компьютерных технологий дает яркие примеры в исследовании космоса и микромира, решения инженерных задач и проблем медицины, высококачественного перевода в литературе, вплоть до анализа подлинности произведений искусства великих мастеров прошлого.

Подводя итог, укажем, что рассмотренная в этом разделе концепция Математического моделирования, стремительно развивающаяся в XX–XXI веках, сегодня лежит в основе деятельности современного научного и инженерного сообщества, являя собой универсальный для всех областей применения, мультидисциплинарный[1] (междисциплинарный) подход в описании явлений Природы, разработке объектов, систем и технологий.

В научно-технической сфере она все более интегрирует цифровые технологии и воплощается в рамках Цифрового инжиниринга, в основе

[1] Мы не напрасно вставили в скобках понятие междисциплинарный, поскольку именно оно использовалось ранее, уступив в последние годы понятию «мультидисциплинарный», что, в общем, оправдано, поскольку ранее рассматривались 2–3 типа процесса, тогда как сегодня их может рассматриваться существенно больше.

которого она лежит, для применения во всех сферах промышленности при решении задач научно-технической и инженерной деятельности.

Тем самым подтверждается высокая значимость математического моделирования в решении современных задач, приобретающих все больший масштаб и расширяющих возможности прикладного использования результатов с появлением и развитием компьютерных технологий, что является следствием трансформации классических подходов математического моделирования в цифровой инжиниринг.

Развитие вычислительных средств, основы инжиниринга, его последующая трансформация и современная интерпретация – Цифровой инжиниринг – будут рассмотрены в следующем разделе.

3 РАЗДЕЛ. О СТАНОВЛЕНИИ И РАЗВИТИИ ЦИФРОВОГО ИНЖИНИРИНГА

3.1. Введение к разделу 3

В настоящем разделе мы будем говорить об инжиниринге. Коснемся истории его развития, чрезвычайной многогранности этого понятия, его места и роли в индустрии и подробно рассмотрим становление его как основы Цифрового инжиниринга.

Прежде всего дадим определение ***инжиниринга,*** под которым будем понимать ***вид наукоемкой инженерной деятельности, опирающийся на фундаментальные естественнонаучные знания и, как правило, требующий специальных знаний в какой-либо предметной области, а также, в частности, включающий оказание услуг в сфере высокотехнологичного производства в целях решения широкого круга инженерных проблем (задач).***

Тогда ***Цифровой инжиниринг – это инжиниринг на основе математического моделирования объекта на базе компьютерных технологий, ориентированный построение всего его жизненного цикла.***

При этом само понятие объекта нами понимается предельно широко – это какое-либо изделие или его части, какая-либо система или технология являющееся объектом инжиниринга и/или моделирования.

Естественно, что Цифровой инжиниринг является развитием понятий инженерной деятельности и инжиниринга с учетом масштабного применения компьютерных технологий. Поэтому в данном пункте настоящего раздела будет рассмотрено само понятие инжиниринга и его характеристики.

При этом мы, естественно, будем опираться на ретроспективное рассмотрение этого понятия.

Начнем с того, что сравним только что данное определение инжиниринга с тем, что дают интернет-источники в части собственно инжиниринга (см. комм. ниже). Приведем определение в англоязычном варианте:

Engineering is the scientific discipline and profession that applies scientific theories, mathematical methods, and empirical evidence to design, create, and analyze technological solutions cognizant of safety, human factors, physical laws, regulations, practicality, and cost.

То есть в переводе на русский язык:

Инжиниринг – это научная дисциплина и профессия, которая применяет научные теории, математические методы и эмпирические данные для проектирования, создания и анализа технологических решений с учетом безопасности, человеческого фактора, физических законов, правил, практичности и стоимости.

Отмечая некоторую словесную «тяжесть» определения[1], оно, тем не менее, представляется совершенно верно отражающим существо инжиниринга.

Итак, как видим, определение Цифрового инжиниринга есть определение инжиниринга, дополненное инструментарием компьютерных технологий. В этом вводном параграфе мы поставили задачу определить основные характеристики инжиниринга, а для этого,

[1] Нет необходимости говорить о научных теориях, математических методах и эмпирических данных, когда мы указали, что инжиниринг есть научная дисциплина, основой которой являются и научные теории, и математические методы, и опытные данные.

прежде всего, необходимо определить его структуру, к чему мы и переходим.

О структуре инжиниринга

Попытка описания структуры инжиниринга на основе ресурсов интернета даёт достаточно детальную картину описания по отраслям не только промышленности, но и человеческой деятельности, с которой вполне можно согласиться. В частности, вводится понятие ***Прикладной инжиниринг,*** определяемое как применение управленческих, дизайнерских и технических навыков для проектирования и интеграции систем, разработки новых продуктов, совершенствования производственных процессов, а также для управления какими-либо функциями организации или компании. При этом само понятие инжиниринга тесно связывают как с отраслями наук, промышленности, так и вообще с человеческой деятельностью. В частности, например:

Биологический инжиниринг:

Сельскохозяйственная инжиниринг;

Бионический инжиниринг;

Генный инжиниринг;

Биомедицинский инжиниринг;

Метаболический инжиниринг;

Нейронный инжиниринг;

Тканевый инжиниринг.

Или

Инжиниринг гражданского строительства – это направление включает в себя следующие поднаправления:

Экологический инжиниринг;

Архитектурный инжиниринг;

Строительный инжиниринг;

Геотехнический инжиниринг;

Транспортный инжиниринг;

Гидротехнический инжиниринг;

Городской инжиниринг (муниципальный инжиниринг).

Таким образом, мы можем привести много направлений и поднаправлений инжиниринга, но наиболее значимыми для нас являются:

Разработка технологических процессов – также представленная в разделе промышленная инженерия;

Промышленный инжиниринг;

Эргономика;

Проектирование производственных помещений.

Промышленный инжиниринг, в свою очередь, включает:

Инжиниринг разработки производительности (труда и производственных процессов);

Инжиниринг разработки технологических процессов (по отраслям);

Логистический инжиниринг.

Разработка программного обеспечения:

Инжиниринг разработок в области автоматизации;

Инжиниринг разработки систем знаний;

Инжиниринг разработки языков;

Инжиниринг разработки в областях системного инжиниринга – анализ, проектирование и управление большими инженерными системами;

Компьютерный инжиниринг (общие сведения).

Мы привели весьма поверхностный и чисто иллюстративный перечень ряда направлений, не претендующий на глубину, но дающий представление о масштабах современного представления об инжиниринге. И, конечно, все приведенные направления и поднаправления имеют свои цифровые аналоги, на связи которых с технологиями математического моделирования мы и остановимся в следующем пункте.

Об инженерном деле

Остановимся на еще одном взгляде на инжиниринг, подойдя к проблеме с другой стороны.

Следуя той традиции, которой мы руководствуемся при написании этой книги, мы начнем с исторического взгляда на развитие инжиниринга. И здесь мы, конечно, должны обратиться к прародителю инжиниринга, к тому, что принято называть ***инженерным делом***. А оно насчитывает не одну тысячу лет, заставляя нас изумляться творческому подвигу людей, живших за долгие годы до нас. Ведь *колесо* и *рычаг* были изобретены в 5-м и 3-м тысячелетиях до нашей эры, а такие фантастические сооружения, как египетские пирамиды, построены за более чем два тысячелетия до рождения Христа.

Теперь посмотрим на то, что отделяет инженерное дело от инжиниринга. Выше мы косвенно указали, что инженерное дело несколько более широкое понятие, чем инжиниринг. Так в чем же отличие? Под ***инженерным делом*** *издавна понимается область человеческой деятельности по использованию знаний в преобразовании мира Природы в интересах человека*. Дополним это определение формулировкой «квалифицированная человеческая деятельность», поскольку она связана с некоторыми знаниями и навыками. Под ***инжинирингом*** же, как мы выше сказали, сегодня понимают и деятельность по оказанию ***наукоемких*** высокотехнологичных услуг в сфере производства. Под ***наукоёмкостью*** нами понимается использование инженерным сообществом фундаментальных естественнонаучных знаний, под которыми (на протяжении всей нашей книги) мы, в первую очередь, понимаем математику и физико-механику. При этом, конечно, мы говорим, во-первых, о нарождении от века к веку групп людей, владеющих знаниями для разработки относительно сложных изделий, и, во-вторых, подчеркиваем, что такая деятельность требовала в то же время и сравнительно простых, но все же расчетов для описания физических процессов и определения характеристик создаваемых изделий.

Итак, мы определили ***инжиниринг как вид наукоемкой инженерной деятельности***. Но само понятие инженерной деятельности как вид человеческой деятельности невероятно широко. Само происхождение слова инженер восходит к Средним векам и имеет латинское происхождение. *Ingeniarius* тогда назывался человек, проектирующий, строящий и управляющий осадными орудиями – пороками: баллистами и катапультами, которые позже заменили пороховыми пушками. Инженеры тех далеких лет занимались также и строительством разного рода фортификационных сооружений.

Из века в век круг деятельности инженеров расширялся, а с ним росла и сфера применения инжиниринга. Причем, как мы уже говорили в предыдущем разделе, сама инженерная деятельность была неисчерпаемым источником задач и идей для математиков и физико-механиков. Здесь по нарастающей шло взаимное обогащение подходами и методами. На протяжении XIX–XX веков инжиниринг становился все более и более наукоемким и способствовал формированию и развитию высокотехнологичных отраслей промышленности. Строительство локомотивов и паровых судов, уникальных мостов и других сооружений, бурно развивавшееся в XIX веке, требовало непрерывного «утончения» не только технологий, но и методов расчетов характеристик конструкций таких объектов.

Упомянув о железнодорожном транспорте, мы сказали о паровозостроении, но история строительства железнодорожных мостов не менее интересна, а в чем-то даже трагична и поучительна. Это направление инженерной деятельности особенно поучительно еще и потому, что наглядно показало несостоятельность чисто эмпирического подхода к строительству таких сложных сооружений, как, в частности, железнодорожные мосты, подверженные множеству воздействий. Долгие годы, несмотря на большой практический опыт многих проектировщиков, качество мостов было низким. И это было обусловлено уровнем инженерных расчетов, то есть именно инжиниринга, о котором мы говорим. Аварии и крушения преследовали строителей, несмотря на опытность и осторожность создателей мостов. Здесь наиболее трагичной является история с огромным мостом (длина 3264 м) через Тейсский залив в Великобритании, строившимся в 1870–1878 годы, т.е. во второй половине XIX века. Катастрофы случились дважды, первый раз – во время самой постройки моста, в 1877 году, когда сразу три пролёта упали в воду вследствие недостаточной устойчивости пролетов, не рассчитанных на воздействие сильного ветра. Вторая катастрофа была страшной, причем по той же причине: из-за не учёта воздействия ветра, которое при сильной буре может доходить до нагрузки в нескольких сотен килограммов на квадратный метр. 28 декабря 1879 года, во время штормового ветра, когда по мосту шёл скорый поезд, обрушились тринадцать пролётов. Поезд упал в воду, – никто из людей не спасся.

Здесь, после описания трагедии, в корне существа которой лежала неточность (неполнота) в существе математической модели, уместно остановиться несколько подробнее на самом понятии математической модели объекта, которой мы пользуемся на протяжении всего нашего исследования. И здесь есть несколько сюжетов. Первый связан со сложностью объекта. Действительно, объект[1], в самом общем случае, может представлять собой как какую-то отдельную деталь или более сложный элемент, например, какой-либо агрегат, так и сам конечный масштабный объект – автомобиль, самолет или что-то другое. Таким образом, математическая модель может быть чрезвычайно сложной. И эта сложность, также в общем случае, может быть многоплановой. Что это означает? Во-первых, несколько условно мы можем говорить о конструкционной или составной сложности, когда объект буквально состоит из ряда элементов (или подобъектов). Во-вторых, речь уже идет о математических моделях самих элементов – подобъектов, и здесь, вообще говоря, имеется бесчисленное множество вариантов, которые обусловлены уровнем точности в описании самой физической сущности (природы) объекта.

[1] Напомним, что под объектом мы в общем случае понимаем также и какие-либо системы, и технологии.

Тем не менее, принципиально важным является то, что математическая модель всегда уникальна, то есть единственна для данного объекта, ***в рамках требований к точности*** вычисляемых на её основе характеристик объекта. И здесь часто возникает вопрос, а почему математическая модель одна и почему их не может быть несколько?

Ответ и прост, и не прост одновременно! Прост потому, что объект, как бы он ни был сложен, всегда один. А не прост потому, что мы можем рассматривать разные уровни сложности в описании математической модели самого объекта! Выше мы описали трагедию с мостом в Англии. Посему также возьмем в качестве объекта металлический мост Петра Великого через Неву в Санкт-Петербурге. Это весьма масштабное сооружение, но на сегодняшнем уровне развития технологий построение математической модели моста как единого, масштабного объекта, не представляет принципиальных трудностей, хотя и является весьма трудоемкой задачей. А теперь посмотрим, что действительно может породить несколько математических моделей этого объекта. Это, во-первых, исходные математические модели механики деформируемого твердого тела (металлоконструкций моста), описывающие физические свойства материала моста (напряжения, деформации), и, во-вторых, математические модели крепежных (соединительных) элементов конструкции. Действительно, выбрав, например, математическую модель в форме уравнений теории упругости [15], получим одну модель, а если мы решим учитывать температурный фактор и привлечем термоупругость, то получим еще одну модель. И так далее. Таким образом, ***множественность математических моделей определяется множественностью же способов описания свойств объекта, – чем более тонкие свойства мы пытаемся описать, тем более***

приближенную к реальности математическую модель мы должны использовать.

Возьмем, например, появление авиации в начале XX века, где проблемы расчётно-теоретической поддержки в деятельности инженеров-авиастроителей приобрели критическое значение. И это вполне понятно, самолет и вертолет – аппараты тяжелее воздуха, и от надежной работы двигателей и элементов их конструкции зависит жизнь людей. А это приводит нас к проблеме точности расчетов таких характеристик, как подъемная сила, например, самолета, или его лобовое сопротивление.

И здесь самое время, как нам нужно определиться – уточнить, что же из современной инженерной деятельности мы относим к собственно инжинирингу? Ответ таков – вся наукоемкая высокотехнологичная деятельность, которая в настоящее время все более и более приобретает элементы исследовательской деятельности. Традиционный вопрос – а строительная индустрия может быть отнесена к передовому инжинирингу? В большинстве своем методы и подходы в этой отрасли достаточно традиционны и являются устоявшимися. Но в ряде случаев и здесь мы должны говорить об инжиниринге. Конечно, речь идет о строительстве уникальных сооружений. Возьмем, к примеру, самое высокое здание в мире – башню Бурдж-Халифа высотой 828 метров в Дубае, крупнейшем городе Объединённых Арабских Эмиратов. При его проектировании возникла весьма непростая проблема качества бетона, которая, как было установлено исследованиями, оказалась связанной с особенностями песка, который должен был быть состоящим не из «гладких» (круглых – овальных) песчинок, а из «граненых». Еще раз подчеркнем, что для этого понадобились специальные исследования!

Также часто обсуждаемый и задаваемый вопрос – существует проектирование и разработка объектов (изделий), а еще существует проектирование и разработка инфраструктуры, связанной, в первую очередь, с эксплуатацией этих объектов. Что мы здесь относим к проблематике инжиниринга? Представляется, что этот вопрос – несколько надуманный, поскольку все определяется характером инфраструктуры и её сложностью, конечно, связанной с объектом. Действительно, возьмем, например, инфраструктуру космодрома «Восточный» – это сложнейший комплекс: телеметрия, топливозаправочная система и так далее. И все это множество систем обладает в своей разработке не меньшей трудоемкостью и сложностью, чем сам объект – ракетная система. Вместе с тем достаточно часто при разработке масштабных проектов выделяют вопросы проектирования, причем отдельно рассматривают проектирование изделий и проектирование инфраструктуры. Здесь уместно отметить, что, вообще говоря, вопросы проектирования – отдельная проблема, предшествующая решению совокупности собственно инженерных задач. Это проблема «складывания из кубиков» проектируемого объекта, его компоновки, детализации и технологичности в изготовлении, определения внешнего облика и так далее. И хотя проектирование, как правило, не содержит сложных расчётно-теоретических задач, тем не менее в ряде случаев без них не обойтись.

В нашей работе мы сосредотачиваемся главным образом на инжиниринге применительно к высокотехнологичным отраслям индустрии. И нам будет интересен Цифровой инжиниринг, то есть тот тип передовой высокотехнологичной инженерной деятельности, который опирается как на фундаментальные знания, так и на компьютерные технологии. Таким образом, в согласии с общей идей нашей работы мы будем стараться выявить связь такого рода инженерной деятельности с математическим знанием, физико-механикой и вычислительными технологиями. Но такой подход, очевидно, требует рассмотрения и ретроспективного исторического взгляда на обсуждаемые вопросы.

3.2. Этапы становления и развития инжиниринга. О развитии инжиниринга от Античности до конца первой половины XX века. Этапы I – III

В обширном введении к данному разделу мы уже определили и обсудили важнейшие понятия нашей работы, а именно ***инжиниринг*** и ***инженерное дело,*** и связали их с определением Цифрового инжиниринга. Здесь мы продолжим обсуждение этих важнейших понятий, при этом будем стараться раскрывать глубинную связь этих двух понятий с основами фундаментального естественнонаучного знания. Напомним, что под ***инженерным делом*** мы договорились понимать область квалифицированной человеческой деятельности по использованию знаний в преобразовании мира Природы в интересах человека. А ***инжиниринг*** рассматриваем как вид наукоёмкой инженерной деятельности, опирающийся на фундаментальные естественнонаучные знания и, как правило, требующий специальных знаний в какой-либо предметной области, а также включающий, в частности, оказание услуг в сфере высокотехнологичного производства в целях решения широкого круга инженерных проблем (задач).

Думается, что попытка пунктуального рассмотрения времени зарождения как инженерного дела, так и инжиниринга, не вполне конструктивна, поскольку внимательный анализ всегда приведет нас к истокам. А это Античность в лице Архимеда, Демокрита, Евклида и других гениев, которые как создали основы подходов к изучению и преобразованию Природы, так и заложили начала научной деятельности, положившей основы и инженерной деятельности. При этом мы должны сразу же отметить, что невероятный духовный прорыв, совершенный древними греками, имел очень слабое продолжение почти до конца Эпохи Возрождения, то есть примерно до XV–XVI века, когда, как мы отмечали, творили математики Н. Тарталья и Д. Кардано и когда начал свою деятельность гениальный Галилео Галилей (1564–1642 гг.). При этом удивительным является тот факт, что, как отмечают историки науки, все научное богатство, все достижения Античности были сохранены в огромной мере благодаря усилиям ученых Арабского мира, которые также серьезно обогатили мировую науку.

Наряду с вопросами о времени происхождения инженерного дела и инжиниринга часто возникает вопрос о том, когда появились первые инженеры. Думается, что этот вопрос невозможно решить с точностью до каких-то конкретных лет, и времена эти нужно связать с временами создания первых сложных машин, например, работоспособной паровой машины – это начало XVIII века. Также в первой половине XVIII века были созданы и первые полноценные ткацкие станки. Так что, конечно, с некоторой долей условности, мы можем считать первую четверть XVIII века временем появления сословия инженеров. Эти первопроходцы сочетали в себе все, что необходимо инженеру и сегодня, – дар видения, умение проектировать, делать чертежи создаваемых машин и, конечно, проводить, хотя и простейшие, расчеты создаваемых изделий.

Первые этапы развития инжиниринга

Времена начала XVIII века мы и возьмем за начало нашего экскурса в историю развития инжиниринга, прошедшего за более чем три столетия путь от простейших методов проектирования и расчетов до передового

Цифрового инжиниринга сегодня. Традиционно эти столетия – от XVIII до XXI века – связывают с временами промышленных революций, но мы попытаемся, находясь в рамках парадигмы нашей работы, связать их с уровнем развития фундаментальных естественных наук, в первую очередь математики и физико-механики. И здесь мы должны попытаться выделить ***этапы развития*** последних, где невозможно не опираться на имена тех великих ученых, которые своими трудами освещали направления развития науки и создавали основы этих этапов. При этом вновь подчеркнем, что мы должны описать такие этапы в связке с развитием инженерного знания.

Безусловно, ***первым таким этапом*** был завершившийся трудами Ньютона и Лейбница этап создания основ исчисления бесконечно малых. Это первая четверть XVIII века, и, конечно, фундамент достижений Ньютона и Лейбница был заложен плеядой их выдающихся предшественников. Ранее мы уже упомянули Х. Гюйгенса, Р. Гука и Б. Паскаля, но в контексте сказанного нельзя не упомянуть:

Рене Декарта (1596–1650 гг.);

Пьера Ферма (1601–1665 гг.);

Исаака Барроу (1630–1677 гг.);

Джона Валлиса (1616–1703 гг.).

И, действительно, например, как мы можем не упомянуть имя Р. Декарта, ведь введенные им координатные системы кардинально упростили описание окружающего нас трехмерного мира и сделали значительно более доступными многие математические образы и модели.

В результате научного подвига названной плеяды ученых ***заложены начала фундаментальных основ математического моделирования в виде математики и физико-механики***.

Прорыв, осуществленный Ньютоном и Лейбницем на первом этапе, был с невероятной мощью подхвачен Леонардом Эйлером и Жозефом Луи Лагранжем.

Таким образом, мы можем утверждать, что ***второй этап*** – это этап Эйлера и Лагранжа, примерно с начала второй четверти XVIII века (примерно в это время Эйлер начал свою творческую деятельность) и завершившийся с уходом Ж. Лагранжа в 1813 г., а это начало второго десятилетия XIX века. И здесь важно указать, что оба крупнейших за всю историю науки математика были и выдающимися инженерами. Особенно ярко это показывает деятельность Л. Эйлера. Достаточно упомянуть о построении им уравнений движения идеальной жидкости, что было безусловным триумфом и к чему не могли даже приблизиться крупнейшие ученые со времён великого Архимеда. А применение методов фактически созданного Эйлером вариационного исчисления, например, для решения задачи о форме закрепленного упругого стержня прямоугольного сечения, нагруженного силой на свободном конце, дало импульс началу работ по механике деформируемого твердого тела. В 1757 году 40-летний Эйлер опубликовал работу о продольном изгибе колонн, в которой приводит формулу для критической нагрузки на колонну.

Отметим и замечательную работу Эйлера в области теории прогибов и колебаний идеально гибкой прямоугольной мембраны размером ($a \times b$), которую он рассматривает как «сетку» из двух систем взаимно-перпендикулярных волокон. Уравнение Эйлера для прогибов мембраны $z(x,y,t)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Заметим, что это было одно из первых уравнений в частных производных, описывающих поведение упругого тела (упругой среды). И таких «прикладных», а по сути дела инженерных, проблем Эйлером было решено великое множество. А если обратиться к творчеству Ж. Лагранжа, то один его выдающийся труд «Аналитическая механика» – это, по сути дела, руководство к действию для всех инженеров (и не только механиков), создающих разного рода машины и механизмы, ведь практически все они движутся или содержат движущиеся детали.

В результате трудов двух крупнейших математиков, механиков и инженеров, а именно так нужно характеризовать Эйлера и Лагранжа, построены ***основы для полномасштабного изучения явлений Природы, основ создания машин, механизмов и иных объектов с опорой на методы математического моделирования на основе математики и физико-механики***.

Второй этап подготовил почву для следующего, ***третьего этапа***, который продолжался практически до середины XX века и длился почти полтора века. И этот этап уже в гораздо меньшей степени характеризуется некоторой универсальностью ведущих ученых – наступили такие времена, когда науку все более и более охватывала специализация. Например, к концу XIX века уже практически не было ученых, которые одинаково хорошо владели бы и математикой, и физико-механикой, и глубоко понимали инженерные проблемы. Но сам этот этап и его начало, например, в лице выдающегося французского инженера Клода Навье (1785–1836 гг.), продемонстрировали совершенно иные примеры. И эти примеры как раз и показывали, что выдающиеся результаты получали в первую очередь универсалы, то есть те, кто смотрел на проблему максимально широко. К. Навье, оставивший свое имя как один из создателей математической модели вязкой жидкости и газа – уравнений Навье–Стокса, – внес большой вклад в разные области инженерного дела.

Еще один замечательный пример выдающегося математика, решавшего важнейшие инженерные задачи, дает нам Жан-Батист Фурье (1768–1830 гг.). Барон Ж.-Б. Фурье в своей монографии «Аналитическая теория тепла» (1822 г.) построил уравнение теплопроводности в твёрдом теле, а также указал методы его интегрирования при различных краевых условиях, что во многих случаях позволяет свести уравнение в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Нельзя не привести еще один яркий пример из работ выдающегося ученого математика и механика Рэлея (Джон Уильям Стретт, известный как лорд Рэлей, 1842–1919 гг.), о работе которого мы упомянули в пункте 2.5 и который в этой работе соединил качества выдающегося инженера-механика и математика. Рэлей поставил и решил следующую задачу (см. рис. 3.1) о наилучшей форме профиля плоского подшипника скольжения с малосжимаемой смазкой [7]. Приведем математическую формулировку задачи Рэлея. Требуется найти экстремум[1] функционала – подъемной силы смазочного слоя:

$$J = -\int_0^L p\,dx, \tag{3.1}$$

где L – длина подшипника (которую, переходя к безразмерным величинам, выберем равной единице), а p – избыточное давление (по отношению к внешнему, например, атмосферному давлению p_0), определяемое линейным уравнением Рейнольдса [7]:

[1] Следуя традициям вариационного исчисления, разыскиваем минимум интеграла – функционала (3.1).

$$\frac{d}{dx}\left(h^3\frac{dp}{dx}-h\right)=0,\ x\in[0,1],\tag{3.2}$$

в котором $h(x)$ – разыскиваемая функция профиля подшипника[1]. Граничными условиями к уравнению (3.2) служат равенства избыточного давления нулю на границах области:

$$p(0) = p(1) = 0.\tag{3.3}$$

Вполне очевидно, что управляющей функцией в этой задаче, с позиций современного подхода теории оптимального управления, должна служить геометрия профиля подшипника $h(x)$, поскольку, будучи входящей в коэффициенты уравнения (3.2), функция $h(x)$ определяет поле давления в подшипнике, и её изменение влечет за собой изменение избыточного давления $p(x)$. Причем, так как размерная величина функции $h(x)$ не может принимать значения меньшие, чем h_{min}, то для её безразмерного значения получаем такое ограничение:

$$h(x)\geq 1.\tag{3.4}$$

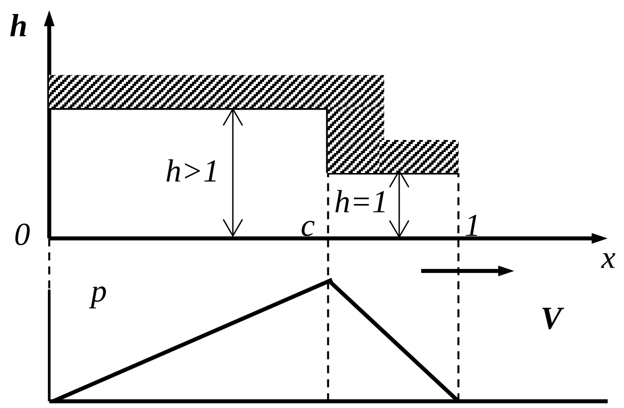

Рис. 3.1. Решение задачи Рэлея

[1] Величины p, h также являются безразмерными, отнесенными, соответственно, к атмосферному давлению p_0, минимальному зазору h_{min}. Предполагаем, что скольжение гладкой поверхности, совпадающей с плоскостью (x,y), осуществляется с постоянной скоростью V в направлении оси x, как это показано на рисунке 3.1.

Итак, теперь мы можем сформулировать задачу оптимизации. Среди непрерывных функций *p(x)*, являющихся решениями краевой задачи (3.2–3.3), и кусочно-непрерывных функций *h(x)*, удовлетворяющих ограничению (3.4), найти те, которые дают минимум функционалу-интегралу (3.1). Поразительным является тот факт, что решением этой задачи Рэлей почти на полвека опередил движение инженерной мысли. До статьи Рэлея [12] не было работ, в которых бы методами неклассического вариационного исчисления (то есть методами, которые сегодня относят к теории оптимального управления) решалась практически важная инженерная задача. В дальнейшем, на основе использования неклассических подходов вариационного исчисления, её решение было повторено американским исследователем Мэдеем (Maday C.J.) [13] через почти пятьдесят лет (!), только в 1967 г., о чем мы уже упоминали ранее.

Продолжим рассказ об описании третьего из определенных нами этапов, говоря о котором, мы только что назвали имена тех ученых, которые, вопреки тенденциям времени, оставались универсалами – были и математиками, и физико-механиками, знавшими ключевые инженерные проблемы. Но все же мы не ответили на центральный вопрос – а что характеризовало этот третий этап, каковы его важнейшие черты? Думается, что основополагающая характеристика третьего этапа в инжиниринге XIX века – это ***нарастающее влияние на него фундаментального естественнонаучного знания***. Действительно, по-иному не могли развиваться проектирование и инженерный анализ. Возьмем конкретный пример – тепловой двигатель. Первая в мире массовая паровая машина английского кузнеца Томаса Ньюкомена (1663–1729 гг.) после почти 10 лет трудов была создана и запущена в 1712 г. Она, в достаточно большом количестве экземпляров для того времени, эксплуатировалась около 50 лет. О совершенстве конструкции говорит, например, тот факт, что между поршнем и цилиндром можно было просунуть мелкую монетку… Но уже примерно через 200 лет в двигателе Рудольфа Дизеля (1858–1913 гг.) степень «притертости» между поршнем и цилиндром была чрезвычайно высока и определяла эффективность работы двигателя. А это как раз и говорит о том, что здесь без надёжной расчётно-теоретической поддержки не обойтись.

И таких примеров мы можем привести великое множество, ведь весь XIX век и начало XX века были временем массового внедрения невиданных до этого технических новинок: телеграф, телефон, аэропланы и автомобили, радиосвязь и так далее. Но все эти плоды инженерного и конструкторского гения требовали невиданных до этого новых методов расчета, то есть того, что мы сегодня называем инженерным анализом и проектированием. А это и есть предмет того, чему посвящена предыдущая глава нашей книги – математическое моделирование, которое становится не просто востребованным, а превращается в повседневный инструмент инженерной деятельности – инжиниринга. При этом ***математический инструментарий непрерывно усложнялся, и это усложнение было связано с тем очевидным фактом, что чем сложнее были создаваемые машины и иные изделия, тем более сложными становились описывающие их математические соотношения***. И, в первую очередь, это были ***дифференциальные уравнения, как обыкновенные, так и в частных производных***. А решение этих уравнений представляло серьезнейшую математическую проблему, и упомянутый выше метод Фурье мог быть применен в крайне редких случаях для сравнительно простых уравнений. Тема эта настолько важна и не проста, что мы считаем необходимым остановиться на ней подробнее, тем более что само её раскрытие наглядно показывает существо возникающих здесь трудностей. По этим причинам мы несколько нарушим наше повествование и опишем подробнее те трудности и проблемы, с которыми столкнулись ученые и инженеры в конце XIX века и первой половине XX века. Причем именно эти времена были временами бурного расцвета инжиниринга, который становился все более и более связанным с фундаментальным научным знанием.

О проблеме «стены» объема вычислений

Итак, к рубежу XIX–XX веков практически в современном виде оформились основы важнейшего раздела математики – классической математической физики. Её аппарат, в виде дифференциальных уравнений в частных производных, позволял переходить к решению инженерных задач из самых разных областей: это и механика деформируемого твердого тела, и аэрогидродинамика, и тепломассобмен, и задачи электромагнетизма. Часто возникающий у многих вопрос о том, а когда появились в руках исследователей (или когда были открыты) дифференциальные уравнения, не имеет точного ответа. Но все же мы можем уверенно сказать, что первым ученым, который получил многие из дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных, был гениальный Леонард Эйлер.

Говоря предельно коротко, ученые и инженеры в виде дифференциальных уравнений ***получили уникальный и универсальный инструмент описания реального физического мира с высокой точностью***.

Чтобы не быть голословными, приведем самое общее описание характерного примера моделирования процесса горения газа (в простейшей газовой плите у Вас дома). При полномасштабном и корректном её рассмотрении требуется взаимосвязанное, то есть совместное (одновременное) описание нескольких существенно разных и чрезвычайно сложных физических процессов, описание которых в общих чертах было известно уже в начале XX века. Это такие физические процессы:

- *течение многокомпонентной газовой среды и продуктов* (*как правило, турбулентное*),
- *объемные и поверхностные химические реакции,*
- *тепломассобмен,*
- *тепловое излучение.*

Еще раз подчеркнем, что каждое из приведенных природных явлений (процессов) описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, которые тесно взаимосвязаны.

Но появившиеся большие возможности математической физики использовались в очень ограниченном объеме по двум причинам. Во-первых, сразу же обнаружились серьёзные проблемы, связанные с вопросом: а как решать многие задачи математической физики, представлявшие собой непреодолимые трудности уже на этапе их постановки. Здесь достаточно посмотреть на только что приведенный пример горения, где далеко не ясны тонкие детали постановки задачи. Причем с драматической очевидностью выяснилось, что в подавляющем большинстве такие задачи могли быть решены только численно, а необходимые методы для таких численных решений появились много позже. И, во-вторых, ***объемы вычислений, необходимые для получения таких решений, были непреодолимы***.

Последнее обстоятельство как раз и породило наименование этого пункта – «стена» объёма вычислений, которая была драматически непреодолимой на рубеже XIX–XX веков.

Итак, дифференциальные уравнения, как обыкновенные, так и в частных производных, описывающие большинство процессов реального физического мира, стали «камнем преткновения» в описании этих процессов в связи с невозможностью их не только аналитического, но и численного решения. В пункте 2.5 Раздела 2 мы показали, в чем же существо проблемы, и сразу же раскроем «ядро» этого существа – оно в непреодолимых в те времена ***объемах вычислений***.

Но несопоставимо более трудными в сравнении с только что рассмотренными были вычислительные проблемы, связанные с дифференциальными уравнениями в частных производных. Повторимся, что именно такие уравнения описывают большинство процессов, происходящих в Природе и в том, что создано человеком. И именно здесь научное и инженерное сообщества столкнулись с неразрешимой проблемой, которую мы назвали «стеной» непреодолимых объемов вычислений. Проблема объемов вычислений присутствовала практически всегда, но на рубеже XIX–XX веков, во времена определённого нами третьего этапа, она становилась все более и более значимой, затормаживая развитие инжиниринга. При этом особую остроту эта проблема приобрела в начале XX века.

Продолжим обсуждение проблемы и существо возникающих здесь трудностей на примере так называемой задачи Дирихле[1], связанной с уравнением Пуассона, детальную аппроксимацию которой мы рассмотрели в пункте 2.5:

[1] Лежён Дирихле (1805–1859 гг.), французский математик.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}= f(x, y), \text{ в } \Omega. \tag{3.7}$$

Краевыми условиями на границе области $\partial\ \Omega$ являются так называемые условия I рода:

$$u|_{\partial\Omega} = g(x). \tag{3.8}$$

Уже в этой относительно простой задаче мы сталкиваемся с тяжелейшими вычислительными трудностями при попытке численного решения задачи с приемлемой точностью. Действительно, вспомним рассмотренное в пункте 2.5 приведение к конечно-разностному виду уравнение Пуассона на основе соотношений для производных. Там мы получили такую систему линейных алгебраических уравнений:

$$u_{i-1,j}+u_{i,j-1}+u_{i+1,j}+u_{i,j+1}-4u_{i,j}=h^2 f_{i,j};\ i=2,3,\ldots,n-1;\ j=2,3,\ldots,m-1 \tag{3.9}$$

Система линейных уравнений (3.9), даже при относительно малых N и M, оказывалась практически неразрешимой даже с использованием наиболее совершенных вычислительных средств первой половины XX века, не говоря уже о веке XIX. А самым совершенным вычислительным средством вплоть до начала второй половины XX века оставались хотя и электрические, но арифмометры. А теперь задумаемся над таким вопросом – каков объем вычислений, необходимых для решения системы (3.9), например, при N=M=10? Такие величины N и M могут обеспечить относительно приемлемый порядок точности, при этом число неизвестных в строго внутренних точках, то есть тех, что не лежат на границе области $\partial\Omega$[1], равно (N-2)×(M-2)= 8×8 =64.

Таким образом, мы должны решить систему уравнений с 64 неизвестными, т.е. матрица такой системы имеет размерность

[1] На самой границе, согласно (4.6), величины $u_{i,j}$ заданы.

(64×64), хотя в действительности она еще больше, с учетом известных в силу краевых условий (3.8) граничных значений решения. Вот в эту то «стену» буквально и «уперлись» передовые ученые и инженеры на рассматриваемом рубеже веков. При этом к концу XIX века – началу XX века были созданы эффективные методы решения систем линейных алгебраических уравнений, например, метод Гаусса[1], который был весьма простым в реализации. Было известно, и какое число арифметических операций для решения системы линейных алгебраических уравнений необходимо для применения метода Гаусса, – для системы с n (напомним, что у нас n=64) неизвестными оно равно примерно[2] n^3. И тут мы как раз и видим проблемы этой самой «стены» объёмов вычислений, – в нашем случае нужно выполнить приблизительно 64^3=262144 арифметических операции! Очевидно, что такие объемы вычислений были совершенно «нереализуемы» ни в первой половине XX века, ни, тем более, в XIX веке.

Но к этим чисто вычислительным трудностям непрерывно прибавлялись и другие, связанные с расширением круга решаемых задач. Например, мы рассматривали решение задачи Дирихле (3.7–3.8) в прямоугольной области Ω, но как быть, если эта область – треугольник или круг!? Но это еще «половина беды». Гораздо сложнее дело обстоит, если мы сталкиваемся с более трудными краевыми или начально-краевыми задачами для дифференциальных уравнений с переменными или, того хуже, с разрывными коэффициентами (например, с конечными разрывами или так называемыми разрывами 1 рода, когда разрывы коэффициентов конечны вдоль всей линии разрыва)! Давайте возьмем

[1] Фридрих Гаусс (1777–1855 гг.), выдающийся немецкий математик.

[2] Конечно, здесь есть возражение, суть которого в том, что матрица системы (4.7) содержит много нулевых элементов.

уже известное нам уравнение Рейнольдса (2.25) из главы 2, памятуя, что $h \geq 1$ во всей области Ω:

$$\frac{\partial}{\partial x}(h^3\frac{\partial p}{\partial x} - hV) + \gamma^2\frac{\partial}{\partial y}(h^3\frac{\partial p}{\partial y}) = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{3.10}$$

$$p|_{\partial\Omega}=0. \tag{3.11}$$

На рис. 2.3 в параграфе 2.5 изображены проекции линии разрыва оптимальной функции $h(x, y)$ для различных значений параметра γ. Возникает естественный вопрос, а как решать краевую задачу (3.10–3.11) для такой разрывной функции $h(x,y)$?

Сформулированные вопросы были в центре внимания математиков в первой половине XX века. И эти вопросы далеко не абстрактные, ведь в инженерной практике такого рода расчетные проблемы встречаются буквально на каждом шагу – посмотрите на кирпичную стену: кирпич и застывший раствор создают слоистую структуру, проблема расчета теплопроводности которой приводит нас к только что описанной задаче.

В решении названных проблем сыграли большую роль отечественные ученые С.Л. Соболев (1908–1989 гг.), А.Н. Тихонов (1906–1993 гг.), О.А. Ладыженская (1922–2004 гг.) и многие другие. При этом нужно указать, что рассматриваемые ими, казалось бы, чисто математические задачи имели непосредственное отношение к инженерным расчетам. Подчеркнем, что один из крупнейших математиков нашего времени Ольга Александровна Ладыженская отмечала, что наши учителя, профессора Физико-Механического факультета Ленинградского политехнического университета А.И. Лурье и Л.Г. Лойцянский, были для нее источниками математических задач, вытекающих из рассмотрения инженерных проблем.

На этом мы закончим описание третьего этапа в становлении и развитии инжиниринга, еще раз упомянув, что мы считаем временем его завершения конец 1940-х – начало 1950-х годов.

Итоги, результаты ***третьего этапа***, чрезвычайно многоплановы, в целом же этот этап может быть охарактеризован как этап ***непрерывно нарастающего влияния фундаментального естественнонаучного знания и его воздействия на полномасштабную и многогранную инженерную деятельность***, ***а также как время начала систематического развития и применения вычислительной математики***.

3.3. О развитии инжиниринга с конца 1940-х годов до конца 1960-х годов и создании технологической основы Цифрового инжиниринга. IV этап

Итак, по нашей градации ***четвертый этап*** развития инжиниринга – это этап, начавшийся с появления Электронных Вычислительных Машин (ЭВМ), то есть с конца 1940-х годов и продолжившийся в 1960-е годы. Как видим, этот этап – самый короткий в нашем перечне этапов, он составляет примерно 25 лет. Но длительность этапа совсем не означает, что он незначителен, наоборот, его значимость невероятно велика и носила революционный характер, поскольку именно на этом этапе человечество построило и стало активно использовать вычислительные машины – уникальный инструмент для поддержки и развития теоретических методов исследования Природы.

Действительно, столкнувшись с необходимостью выполнения масштабных расчетов, на рубеже XIX–XX веков научное и инженерное сообщество пришло к необходимости создания мощных вычислителей, над чем многие выдающиеся математики и инженеры думали на протяжении нескольких веков. С того, по какому пути пошли первопроходцы в середине XX века, создавая первые реальные вычислительные машины, мы и начнем повествование в этом пункте. Речь пойдет об Электронных Цифровых Вычислительных Машинах (ЭЦВМ) и программировании. Программирование, как совокупность технологий применения ЭЦВМ, берет свое начало из конструкционных основ ЭЦВМ, а именно из принципа программного управления работой вычислительных машин. Именно команды вычислительных машин, как мы увидим далее, составляют основы современного программного обеспечения.

Важно упомянуть также то, что в середине 1940-х годов были изобретены первые аналоговые вычислительные машины (АВМ), которые тоже вошли в практику решения научных и исследовательских задач различных областей наук. Функциональная задача аналоговых вычислительных машин – в моделировании физических процессов путем представления переменных непрерывными физическими величинами. АВМ уступают электронным вычислительным машинам (ЭВМ), поскольку универсальность и точность вычислений ограничена конкретными задачами моделирования и подвержена погрешностям. В связи с этим АВМ оказали меньшее влияние на развитие концепции цифрового инжиниринга, чем ЭВМ, и не были рассмотрены в пособии.

О вычислительных машинах

Со времени появления и начала практического использования ЭЦВМ прошло уже более семи десятилетий. И, конечно, до времени появления полномасштабного Цифрового инжиниринга было еще довольно далеко. И здесь любопытно отметить, что время ввода в строй первых отечественных ЭЦВМ – это как раз с 1950-го по 1960-е годы, когда были осуществлены такие выдающиеся проекты:

1954 год – построена и запущена первая в мире атомная электростанция;

1957 год – запущен первый спутник;

1959 год – построен первый в мире атомный ледокол «Ленин»;

1961 год – совершен полет Юрия Гагарина.

Нельзя упустить из поля внимания и созданную в 1949 году атомную бомбу, что было экзистенциальным фактором для существования СССР и о создании которой мы говорили в параграфе 2.5.

То есть развертывание масштабного отечественного проекта по созданию ЭЦВМ, наряду с Атомным и Космическим проектами, как нам сегодня кажется, «стучалось в двери», но, увы, проект не был разработан, хотя о необходимости его говорили ведущие отечественные ученые. Вместе с тем обращение академика М.А. Лаврентьева (1900–1980 гг.) к И.В. Сталину было услышано, и работы по созданию ЭЦВМ ускорились и приняли систематический характер.

Назовем имена первопроходцев в этом важнейшем деле. Это были подлинные энтузиасты, создававшие первые машины практически с чистого листа. В Киеве над машиной МЭСМ (Малой Электронной Счётной Машиной) работала группа под руководством директора Института электротехники АН УССР Сергея Алексеевича Лебедева (1902–1974 гг.), а в Москве в Энергетическом институте группа под руководством Исаака Семёновича Брука (1902–1974 гг.), члена-корреспондента АН СССР, специалиста в области энергетики, работала над машиной М-1. Оговоримся, что работа группы С.А. Лебедева велась по заданию Правительства, тогда как работы группы И.С. Брука[1] велись исключительно на энтузиазме создателей. Удивительно, но обе машины были запущены в работу практически одновременно в декабре 1952 года. Машина МЭСМ была более производительной, чем М-1, но надо иметь в виду, что последняя была несопоставимо меньше физически и потребляла значительно меньше энергии, обладая рядом технических преимуществ.

Обе вычислительные машины активно совершенствовались. М-1 получила развитие к 1960-му году до машины М-3 с производительностью до 1000 операций в секунду и была выпущена в количестве 16 штук. Технологию разработки этого семейства машин в дальнейшем использовали и для создания электронно-вычислительных машин «Раздан», «Минск» и других. Машина МЭСМ, в свою очередь, послужила прототипом для семейства БЭСМ, Большой Электронной Счётной Машины, ставшей родоначальницей одного из самых распространённых семейств советских вычислителей-компьютеров. Первая из машин этого семейства БЭСМ имела производительность около 10 000 операций в секунду. Именно эта система **предполагалась** в качестве инструмента для учёных и инженеров. Следующая модель БЭСМ-2 производительностью до 20 000 операций в секунду разрабатывалась уже для масштабного серийного производства. На модификации этой машины БЭСМ-2М довелось работать над дипломным проектом одному из авторов этой книги.

Теперь самое время кратко остановиться на ключевых конструктивных элементах, из которых состоят ЭЦВМ (или ЭВМ), при этом отметим, что сами наименования (понятия) этих элементов в

---

[1] В 1948 году группа И.С. Брука подала заявку на регистрацию проекта в патентное бюро. Через два года вышло постановление Президиума АН СССР о разработке ЭВМ М-1.

основном сформировались, начиная с первых ЭВМ, и в своих главных чертах сохраняются и сегодня, то есть из них построены все современные ЭВМ и суперЭВМ, или суперкомпьютеры.

Итак, в самых общих чертах основными элементами первых ЭВМ были:

- арифметическое и логическое устройство;
- оперативная память;
- долговременная память;
- каналы, связывающие все элементы в единое целое;
- периферийные устройства, осуществляющие ввод и вывод данных.

Кратко опишем характеристики каждого из этих устройств, поясняя принципиально важные для последующего изложения моменты.

Арифметическое и логическое устройство – это «мозг» ЭВМ, где совершаются все операции и под управлением которого работает сама ЭВМ. Сегодня это устройство называют процессором[1].

Оперативная память, или ***Оперативное запоминающее устройство** (ОЗУ)* **–** это хранилища текущих, то есть, буквально, оперативных данных. Её основное назначение – обмен данными с процессором, и здесь важно понимать, что, начиная с первых вычислительных машин, ОЗУ всегда имели и имеют сегодня (за редким исключением для специальных систем) важнейшее назначение – хранение команд-инструкций и данных для решения задачи или совокупности задач. При этом весь набор команд-инструкций для решения конкретной задачи стали называть ***программой***. Об этом подробнее мы поговорим далее в этом параграфе.

[1] Сегодня понятие процессор подразумевает и так называемые многоядерные процессоры.

В первых ЭВМ для построения оперативной памяти использовались различные физические принципы, при этом емкость самой памяти была весьма малой – от нескольких десятков 16-разрядных (битных) «слов», как у ЭВМ МЭСМ (1951 г.), до 4096 единиц 45-разрядных «слов» у М-20 (1958 г.). Отметим, что физически каждый разряд – бит (bit) – может иметь только два состояния, одно из которых отождествляется с хранением 0, другое – с хранением 1. При этом основной, элементарной составляющей оперативной памяти является байт (byte), состоящий из восьми битов – наименьших возможных хранителей информации.

Долговременная память служит для длительного хранения информации и со времени создания первых ЭВМ физически выполнялась в виде хранилищ на магнитных лентах либо в виде так называемых магнитных барабанов. Также, начиная с первых вычислительных машин, объемы долговременной памяти многократно превосходили объемы оперативной памяти. В современных компьютерах долговременная память, как правило, выполняется в виде магнитных дисков.

Что касается ***каналов, связывающих все устройства машины*** в единое целое, их назначение вполне понятно, также как и назначение всего множества ***периферийных устройств***, которые служат для ввода и вывода данных в разнообразном виде. Отметим также, что сегодня понятие «каналы» используется редко и, как правило, говорят о материнской плате.

Со временем в СССР сформировалось несколько центров по разработке и производству вычислительной техники – это были центры в Армянской ССР, в Белорусской ССР и Украинской ССР. При этом выпускался весьма широкий ряд машин, наиболее массовыми из которых были семейства машин БЭСМ, машины серии «М» (М20, М220 и др.), «Минск», «Урал» и ряд других. Самой известной и мощной была последняя машина семейства БЭСМ – БЭСМ-6 (Рис. 3.2), в определенном смысле вершина советского производства ЭВМ (главный конструктор – С.А. Лебедев, 1968 г.). ЭВМ, содержащая порядка 60 тыс. транзисторов и 180 тыс. диодов, имела быстродействие 1 млн операций в секунду. БЭСМ-6 производилась до 1987 г., и всего было выпущено 355 систем. Всего же, согласно ряду источников, в СССР в 1960-е годы было разработано около 30 типов ЭВМ.

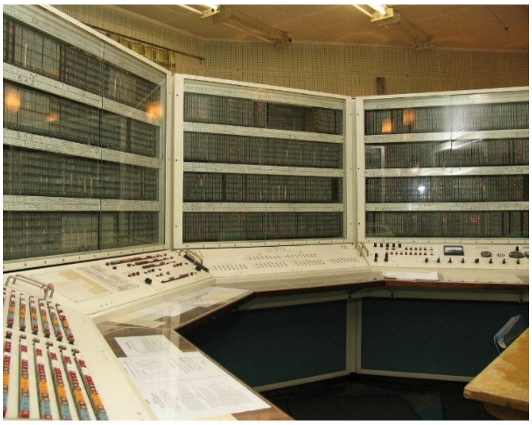

Рис. 3.2. ЭВМ БЭСМ-6

В дальнейшем интенсивном развитии отечественной вычислительной техники наступил период серьезного отставания от западных производителей. Он был обусловлен не отсутствием идей и новых разработок, – проблема была главным образом в низком технологическом уровне развития микроэлектроники в стране. В декабре 1967 года по инициативе Министерства радиопромышленности было принято решение для унификации вычислительных систем взять за основу семейство машин IBM 360. Предполагалось быстро «скопировать» все семейство ЭВМ американской компании IBM и использовать большое количество уже готового и унифицированного под это семейство программного обеспечения. Отметим, что такие ведущие специалисты, как академик С.А. Лебедев, считали это решение неправильным, справедливость чего подтвердило будущее. Тем не менее, в СССР и странах Совета экономической взаимопомощи (СЭВ) был воспроизведен широкий круг машин Единого Семейства ЭВМ (ЕС ЭВМ) – от небольших машин ЕС 1020 до весьма мощных ЕС 1066 (всего за период с 1970 по 1990 год было произведено более 15 000 машин ряда ЕС ЭВМ). Также было организовано производство Системы Малых машин (СМ ЭВМ) на базе архитектур американских компаний Hewlett Packard и DEC (выпускала серию компьютеров PDP). В течение последних лет предпринимаются попытки возродить отрасль разработки и создания ЭВМ, но это отдельная важная тема, требующая детального рассмотрения.

В завершение краткого рассказа, посвященного созданию и развитию отечественных ЭВМ, уместно остановиться на том, а что мы понимаем под суперЭВМ, или суперкомпьютером, и в чем его отличие от традиционных, «обычных» ЭВМ? Это уместно еще и потому, что суперкомпьютерные системы все более и более широко внедряются во все сферы деятельности общества и, конечно, во многие области промышленности. И здесь авторы опираются на свой достаточно солидный опыт, который, думается, пригодится нам для того, чтобы дать читателю верное толкование, а что же представляют собой суперкомпьютеры. В 1969–1971 годах, как уже говорилось, одному из авторов довелось работать на машинах БЭСМ 2М и М-220. Эти ЭВМ имели скорость порядка 10 000–20 000 операций в секунду. А теперь вспомним о только что упомянутой машине БЭСМ-6, созданной в те же годы. Возникает вопрос, а можно ли было назвать БЭСМ-6 суперЭВМ в сравнении с упомянутыми машинами? Наверное, можно, т.к. скорость её работы в 1 миллион операций в секунду была на 2 порядка выше, а это значит, что решение какой-либо задачи можно было провести на БЭСМ-6 в 100 раз быстрее! И это очень хороший результат.

Однако проблема того, а как определить понятие суперкомпьютер, требует тщательного рассмотрения. Начнем с того, что за прошедшие после крушения СССР десятилетия мировой уровень развития вычислительной техники претерпел революционные изменения. И, безусловно, главной составляющей этих изменений была революция в микроэлектронике. То есть в той самой отрасли, на которой, как мы говорили, «споткнулась» советская электронная промышленность в 1970-е годы. Сначала мировая микроэлектроника породила микропроцессоры, которые в своем развитии сделали следующий революционный шаг – разработку и развитие многоядерных микропроцессоров, о которых мы упоминали ранее. Последние представляют собой совокупность конструктивно объединенных на одной платформе ядер – процессоров, то есть множество вычислителей на одной «плате – платформе».

Определяя понятие суперкомпьютера, мы можем утверждать, что оно применительно к той или иной вычислительной системе является, если так можно выразиться, временно верным… Почему!? *К* ***суперкомпьютерам естественно отнести такие классы сосредоточенных вычислительных систем, которые на данном отрезке времени имеют производительность на 3–4 порядка и более, чем массово распространенные компьютеры.*** Отметим, что, когда мы говорим о сосредоточенных вычислительных системах, мы говорим о машинах конструктивно, то есть говорим о машинах, территориально расположенных в одном месте всеми своими блоками-элементами, например, как суперкомпьютер «Политехнический», расположенный в Научно-Исследовательском Корпусе СПбПУ, как, впрочем, и суперкомпьютеры в Научно-исследовательском вычислительном центре МГУ им М.В. Ломоносова, расположенные в одном здании.

О наиболее мощных суперкомпьютерах

Сегодня одним из мировых лидеров в производстве микропроцессоров является корпорации Intel (США), основанная в 1968 г. Её первым микропроцессором был процессор i4040 (1969 г.), представлявший собой 4-разрядное устройство с 2300 транзисторами. В 1972 г. был выпущен 8-разрядный i8008, но революцией можно считать 1974 г. – выпуск процессора i8080 с тактовой частотой 2 МГц, которая прямо связана с числом операций, производимых процессором. Он разошелся многомиллионными тиражами и заложил основу для всей дальнейшей архитектуры процессоров. С этого момента начинается отсчет периода развития современных микропроцессоров. Специалисты в сфере вычислительной техники выделяют много вех (поколений) в этом развитии, но нас интересует момент перехода к названным выше многоядерным микропроцессорам.

Первым таким массовым многоядерным процессором стал процессор POWER4 с двумя ядрами в одном корпусе или, как принято говорить, на одном кристалле, выпущенный компанией IBM в 2001 году. Затем вышли на рынок двухъядерные процессоры компании Sun (2004 г.) и других производителей. В мае 2005 года Intel выпустила процессор Pentium D, ставший первым 2-ядерным процессором, предназначенным для персональных компьютеров. А в марте 2010 года появились первые 12-ядерные серийные процессоры Opteron 6100 американской компании AMD (Advanced Micro Devices). Эта гонка за лидерством продолжается непрерывно и конца ей не видно, но нас интересует то, как это отразилось на производстве вычислительных машин. Ответ очевиден и прост – отразилось, и самым кардинальным образом. При этом уже в 1960-е годы наметился многопроцессорный путь построения высокопроизводительных вычислительных систем, и появление многоядерных микропроцессоров идеальным образом способствовало развитию суперкомпьютеров. Все наиболее мощные вычислительные системы сегодня построены на многоядерных процессорах.

В Таблице 3.1 приведены характеристики трех самых мощных компьютеров в мире, данные о которых заимствованы из списка TOP500 (www.top500.org) наиболее мощных вычислительных систем мира в редакции по состоянию на июнь 2025 года. Как видим, самый мощный на момент написания этих строк El Capitan имеет производительность более 2700 Pflops, то есть $2{,}7*10^{15}$ так называемых операций с плавающей точкой[1] в секунду, о чем подробнее поговорим далее. Таким образом, при анализе конструкции этого суперкомпьютера мы увидим, что он содержит многие миллионы вычислительных ядер!

Таблица 3.1 Характеристики наиболее производительных суперкомпьютеров в мире (по состоянию на июнь 2025 года)

Производи-тельность Тестовая/ Пиковая Pflop/s	Название	Модель	Процессор	Произво-дитель	Место установки
1742.00/ 2746.38	**El Capitan**	HPE Cray EX255a	EPYC 24C	HPE	Ливерморская национальная лаборатория имени Э. Лоуренса США, 2024

[1] Операциями с плавающей точкой называют операции сложения, вычитания, умножения и деления с числами, имеющими произвольное число знаков после запятой.

Производи-тельность Тестовая/ Пиковая Pflop/s	Название	Модель	Процессор	Произво-дитель	Место установки
1353.00/ 2055.72	**Frontier**	HPE Cray EX235a	EPYC 64C	HPE	Ок-Риджская национальная лаборатория США, 2022
1012.00/ 1980.01	**Aurora**	HPE Cray EX	Xeon Max 9470	HPE	Аргоннская национальная лаборатория США, 2023

А теперь задумаемся над вопросом, а как организовать процесс вычисления на таком количестве вычислительных ядер!? И здесь вновь мы возвращаемся к фундаменту естественнонаучного знания – к математике, а в ней уже достаточно давно сформировалось очень крупное направление, называемое прикладной математикой, в котором имеется отдельная, быстрыми темпами развивающаяся область – методы параллельных вычислений [16; 17]. Эта область математического знания как раз и посвящена методам распараллеливания (распределения – разделения) вычислений на большом числе вычислителей.

Теперь обратим внимание на первую колонку таблицы 3.1, в которой приведены максимальная и пиковая производительность рассматриваемых вычислительных систем. Максимальная производительность подразумевает некоторую стандартную среднюю загрузку системы, которая ограничивается (упрощенно говоря) межпроцессорными связями (то есть скоростями обмена между процессорами), тогда как пиковая производительность подразумевает полную загруженность всех вычислителей на максимуме (пике) производительности каждого.

Как видим, производительность вычислительных систем выражена в PFlop/s (ПетаФлопс в секунду). Это связано с тем, что сегодня производительность мощных компьютеров измеряют в так называемых «ГигаФлопсах в секунду» (1 Gflop/s = 10^9 операций с плавающей точкой в секунду). При этом 1000 ГигаФлопс в секунду, то есть 10^{12} операций с плавающей точкой, называют 1 ТераФлопсом в секунду (1 Tflop/s), а 1000 ТераФлопс в секунду называют 1 ПетаФлопсом в секунду (1 Pflop/s), то есть 1 Pflop/s=10^{15} операций с плавающей точкой в секунду. Таким образом, в нашей таблице 3.1 на первых позициях стоят системы с пиковой производительностью свыше 1000 Pflop/s и 2000 Pflop/s соответственно. А это уже системы с ЭкзаФлопсной производительностью.

Зачем нужны такие мощные вычислительные системы, мы поговорим немного позже.

На этом мы и остановимся, обсуждая тему разработки и создания ЭВМ – компьютеров.

О программировании

В нашей работе мы касаемся самых основ, и тема программирования для компьютеров является одной из ключевых по своей значимости. Почему!? Потому что именно на основе множества компьютерных технологий создается необозримый инструментарий современной науки, промышленности, здравоохранения, культуры и т.д.

Использованное выше прилагательное «необозримый» написано не для красного слова – все, с чем встречается современный человек, от кассового аппарата в магазине до ресурсов интернета, − все это создано на основе применения технологий программирования. И здесь нельзя обойтись без одного важного замечания. Довольно часто стали говорить о нехватке программистов и их «всемогущих возможностях». Мы же в очередной раз подчеркиваем, что программирование – это всего лишь технология или совокупность технологий, то есть владение ими, хотя и требующее определенной и подчас весьма высокой квалификации, – это все же ремесло, хотя в ряде случаев и обретающее творческий характер. И от фундаментального естественнонаучного знания, основы всего гигантского здания компьютерных технологий, мы никуда не уйдем, и именно оно, в виде знания многих разделов математики и физико-механики, лежит в основе всех алгоритмов, на основе которых программисты пишут программы.

А теперь о проблемах программирования, о которых сказано выше. Проблемы эти для непосвященного далеко не просты, и даже при нашем кратком рассказе читатель будет вынужден погрузиться в тему достаточно глубоко.

Для понимания существа того, что же такое программирование[1] для компьютеров, мы опять-таки, как и в случае с ЭВМ, должны обратиться к истории его становления и развития. И здесь, развивая тему основ программирования, мы вынуждены вновь вернуться на три четвери века назад, во времена первых компьютеров, и начнем с разъяснения важнейшего понятия адресности ЭВМ, которое можно особенно наглядно описать на примере первых отечественных вычислительных машин. При этом полезно вспомнить и о том, что такое оперативная и долговременная память, о чем мы писали немного выше. Как уже

[1] Термин программирование используют и как планирование, например, есть предмет Математическое программирование, где рассматривают вопросы конечномерной оптимизации.

говорилось, один из авторов начинал свою работу в 1969–1970-х годах на ЭВМ БЭСМ – 2М. Эта машина была трехадресной, а это означает, что в процессе выполнения одной команды происходило обращение к трем ячейкам оперативного запоминающего устройства (ОЗУ). Большинство команд трехадресной машины имели такой вид:

Адрес	КОП	А1	А2	А3

где

- **Адрес** – номер той ячейки ОЗУ, где записана данная команда;
- КОП – код (номер) выполняемой операции, например, 001 – сложение, 002 – вычитание и т.д.;
- А1, А2 и А3 – адреса (номера) тех ячеек, с которыми «работает» данная команда.

А «работает» эта команда предельно просто, что мы и покажем на примере операции сложения. Пусть, например, числа x и y расположены в ячейках с номерами 1021 и 0955 соответственно, а результат сложения – число z – должен быть помещен в ячейку с номером 0501. Тогда команда сложения, например, расположенная в оперативной памяти машины с номером ячейки (или буквально в ячейке) 0243, имеет вид (001 – номер операции сложения):

0243	001	1021	0955	0501

Таким образом, мы привели пример команды так называемой трехадресной ЭВМ, когда в результате выполнения команды идет обращение процессора – устройства вычислителя к трем ячейкам оперативной памяти, но были двух- и одноадресные машины с такими форматами команд:

Адрес	КОП	А1	А2

Адрес	КОП	А1

В первом случае процессор как устройство, на котором выполняются операции, «работает» с двумя ячейками оперативного запоминающего устройства (ОЗУ), тогда как во втором случае – с одной. Отметим еще раз, что описанные только что команды (сегодня часто говорят «инструкции») размещаются в ОЗУ вычислительной машины. Напомним также, что наряду с ОЗУ в составе уже первых ЭВМ были и устройства долговременной памяти, куда записывались данные, требующие длительного хранения, которые в наше время выполняются в виде магнитных дисков.

А теперь обратимся к важнейшему понятию ***программы***. И здесь есть некоторые тонкости, о которых поговорим прежде всего. Начнем с того, что решение одной и той же задачи может быть представлено множеством программ. Действительно, исторически понятие программы восходит к понятию программы в кодах, т.е. её написанию на языке команд данного вычислителя, данной ЭВМ, и, естественно, зависит от его типа. Будучи записанной для трехадресной машины, программа имеет один вид, а для двух- или одноадресной – совершенно иной. Таким образом, мы можем дать такое определение ***Программы как записи алгоритма решения какой-либо задачи (проблемы) на каком-либо языке программирования (алгоритмическом языке) либо на языке команд (кодов) компьютера.***

Программы подразделяют на системные и прикладные. Вполне очевидно, что сам алгоритм решения задачи состоит из последовательности действий, где под ***действием*** понимается каждый шаг алгоритма решения задачи. Таким действием может быть как команда выполнения отдельной арифметической операции, так и операция загрузки в ОЗУ какого-либо массива (множества) чисел, или команда передачи управления (команда перехода из одного места программы в другое), или иная команда.

Теперь, возвращаясь к процессору, повторим, что чисто технически процессор руководствуется в своих действиях инструкциями-командами, «записанными» в ОЗУ, которые он ***последовательно***[1] выполняет, и их совокупность как раз и есть выше определенная программа, записанная на языке команд машины или, как сегодня принято говорить, в кодах. Заметим попутно, что в этом и состоит ***принцип программного (автоматического) управления ЭВМ***, который часто отмечают при обсуждении этой темы.

Многократно упомянутая выше ЭВМ БЭСМ-2М в стандартном оснащении имела оперативную память (ОЗУ) объемом 2048 ячеек, каждая из которых имела 41 двоичный разряд, или 1 бит (о чем говорили ранее), и в которых могло храниться минимальное значение информации в виде 0 или 1. Наряду с оперативной памятью, как мы писали выше, уже первые компьютеры практически сразу стали снабжать долговременной памятью, в которой информация в виде программ и данных могла храниться сколь угодно долго. В первые годы развития вычислительных машин долговременная память выполнялась на магнитных барабанах и магнитных лентах, а в последующем, как уже говорилось, – на магнитных дисках. Напомним, что в современных компьютерах объем оперативной и долговременной памяти измеряют в байтах, один байт равен 8 битам. Соответственно, 1024 байта обозначают как 1 ***Килобайт***, или 1 Кб. Один ***Мегабайт*** (1 Мб) равен 1024 Кб, а один ***Гигабайт*** (1 Гб) равен 1024 Мб. Оперативная и долговременная память современного персонального

---

[1] Это, конечно, не исключает наличие команд перехода по какому-либо условию или безусловных команд перехода, о чем упомянуто выше.

компьютера составляет многие сотни гигабайт, тогда как для мощных суперкомпьютеров эти величины в тысячи раз больше.

Возвращаясь к началу эпохи компьютеров, заметим, что в каждой ячейке нашей ЭВМ БЭСМ-2М могло храниться либо одно, например, восьмизначное вещественное (или целое) число, либо одна команда. Возникает вопрос – много или мало 2048 ячеек оперативной памяти? Конечно, в сравнении с только что названными невероятными объёмами памяти современных компьютеров это чрезвычайно мало, но для большинства традиционных инженерных задач середины прошлого века этого было вполне достаточно, например, 1000 ячеек на программу и 1000 ячеек на необходимые для вычислений числа.

А теперь задумаемся над вопросом, какого труда стоило написать программу из 1000 команд компьютера? Авторы первых программ – а эти ученые и инженеры и были первыми программистами (!) – выписывали на бланках тысячи команд в виде чисел, отвечающих как командам, так и адресам оперативной памяти. Теперь представьте себе среднюю программу размером в 1000 трехадресных команд. Если мы напишем такую программу, то на упомянутых бланках мы должны записать 1000 × (4 + + 3 + 12) =19 000 цифр – знаков (посмотрите на примеры команд, записанных выше)! В этих записях первые четыре цифры в скобках для случая трехадресной машины – номер ячейки, где расположена данная команда, затем три цифры – код операции и, наконец, последние 12 цифр – это три четырехзначных числа номеров ячеек, где расположены данные. Вполне очевидно, что даже опытный и очень аккуратный человек может допустить здесь ошибки, но ведь еще нужно и переписать (закодировать) эту программу на перфокарты, с которых она считается в ОЗУ! Совершенно очевидно, что ошибок здесь не избежать даже при самой тщательной подготовке программы. Для убедительности сказанного попробуйте переписать из любой таблицы подряд двадцать десятизначных чисел и потом проверить с друзьями. Сколько Вы найдете ошибок?

Но внимательный взгляд показывает, что, кроме большой трудоемкости, имеются и другие не менее серьёзные проблемы. Действительно, если мы посмотрим на таким образом записанную программу, то легко убедимся, что она в описанном виде совершенно не наглядна – этот набор огромного числа цифр на листах бумаги, который не имеет (в смысле наглядности) ничего общего с математической записью нашей задачи. Но и это не все, – программа для трехадресной машины не могла быть использована для двух- и одноадресной машин, и наоборот!

А ведь именно с преодоления этих трудностей и начиналось программирование!

Названные проблемы существенно тормозили внедрение ЭВМ в первые годы после их появления. Нужно было уйти от «массового» написания программ на названных выше «языках» команд ЭВМ. А как облегчить процесс написания программ, т.е. собственно программирования? Как переложить всю имеющуюся здесь рутинную работу на «плечи» ЭВМ? Схема, по которой шла мысль исследователей, такова:

- любая проблема, требующая большого объёма вычислений (а такие главным образом и рассматривались с первых дней появления и внедрения ЭВМ), как правило, может быть хорошо формализована, то есть оформлена на языке математики;
- конечно, мы знаем все команды наших компьютеров;

- а почему бы не построить такую программу, которая на основе нашей формально записанной математической задачи строила бы отвечающую ей программу на языке команд ЭВМ?

Но тут возникает проблема, состоящая в том, что предварительно нашу задачу нужно записать на ***языке***, близком к обычному математическому языку, то есть формализовать особым образом – в этом, по сути дела, и состоит качественное написание алгоритма. Такие языки, получившие наименование языков программирования, начали создавать в самом начале 1950-х годов. Здесь были и интересные отечественные разработки, а наибольшее распространение получил язык FORTRAN (Formula Translation). Работа по созданию этого языка и, что не менее важно, программы-переводчика для него была начата компанией IBM в 1954 г. Эти работы возглавил математик Джон Бэкус (1924–2007 гг.). Первой программой-переводчиком была программа для машины IBM – 704, которая получила широкое распространение в 1957 г., когда язык FORTRAN был официально опубликован. Сама программа-переводчик была в дальнейшем названа транслятором (впоследствии такие программы стали называть компиляторами, когда к ним добавился еще ряд специальных функций).

Создание языка FORTRAN породило новый этап в развитии технологий программирования и привело к формированию «эпохи» проблемно-ориентированных языков, то есть языков, структура и существо которых направлено на решение групп задач по отдельным направлениям. На этом пути были созданы:

- ALGOL 60, ALGOL 68 – алгоритмические языки, ориентированные в основном на очень широкий круг научных и инженерных вычислительных задач;

- PASCAL – язык программирования, ориентированный на круг задач самого широкого профиля;

- COBOL – язык, который был создан для работы с большими массивами экономических данных;

- LISP – язык, созданный для работы с большими списками

и т.д.

Отметим, что сам «прародитель» FORTRAN претерпел массу модификаций от FORTRAN к FORTRAN 4, от FORTRAN 77 к FORTRAN 90 и, наконец, к «параллельной» версии FORTRAN. Сегодня многие пользуются языком C++ и другими языками, впитавшими в себя все сильные стороны многих языков, начиная с FORTRAN.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, приведем в качестве примера программу[1] вычисления интеграла по формуле трапеций (2.18), которая имеет вид:

$$\int_{0}^{1} f(x)dx \approx S_n = \frac{h}{2}[(f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + \ldots + (f_{n-1} + f_n)].$$

Напомним, что символом f_i ($i=0, 1,\ldots, n$) обозначены значения нашей исходной подынтегральной функции $sinx/x$ в узлах сетки x_i, то есть $f_i = f(x_i)$ ($i=0, 1, \ldots, n$). Вполне осевидно, что сумма справа включает в себя многократно повторяющиеся вычисление функции $f_i = f(x_i)$ с последующим накоплением суммы. Такого типа задачи являются характерными для методов вычислений и относятся к так называемым циклическим процессам. Основываясь на этом примере, приведем программу, написанную на одной из многочисленных версий языка

[1] Формально в рамках определений языка FORTRAN такая программа называется подпрограммой.

FORTRAN. При этом саму программу оформим в виде подпрограммы (так называемой процедуры – функции, итогом работы которой является одно число – значение интеграла), описание которой приведено ниже.

```
      REAL FUNCTION J(n)
      REAL a,b,h,S
      INTEGER n
      WRITE(3,10)
C*****************************
C Процедура вычисляет интеграл *
C*****************************
C n - Число интервалов разбиения промежутка [0,1]
C Определение границ интегрирования
             a=0.0; b=1.0
C Вычисление шага разбиения h
             h=(b-a)/n
C Определение начальных значений суммы S и аргумента x
             S=0;  x=0
C Вычисление суммы по n промежуткам
         DO i=0,n-1
           S=S + sin(x)/x + sin(x+h)/(x+h)
           x=x+h
         END DO
C Вычисление интеграла
             J=h*S/2
       WRITE(3,1) n,J
       WRITE(3,11)
1      FORMAT(' n=',I8,' J=',F12.8)
```

```
10      FORMAT('     INTEGRAL J')
11      FORMAT(' END INTEGRAL J')
        RETURN
        END
```

Прежде всего укажем, что символом С в первых позициях ряда строк обозначены комментарии, тогда как цифрами обозначены метки, в данном случае выступающие как номера операторов формата **FORMAT** операторов ввода-вывода данных. Оператор **DO … END DO** называют оператором цикла, он обеспечивает многоразовое выполнение вычисления величины

$$\sin(x)/x + \sin(x+h)/(x+h)$$

при последовательном изменении аргумента х и накопления соответствующей суммы. В подпрограмме можно выделить два блока: первый – блок описаний объектов подпрограммы с описателями типов переменных **REAL FUNCTION** (вещественная функция), **REAL** (вещественная переменная), **INTEGER** (целая переменная). Второй блок включает в себя собственно вычисления. Этим кратким описанием программы мы и ограничимся, отметив в качестве последнего, что номер 3 в операторах вывода **WRITE** означает (несколько грубо говоря) номер устройства, на которое выводят данные и результаты, в соответствии с указанным оператором **FORMAT** видом – это, например, печатающее устройство или экран монитора.

Массовое появление языков программирования и алгоритмических языков в 60–70-х годах прошлого века привело к массовой же разработке трансляторов (компиляторов), обеспечивающих, как выше указывалось, перевод программ на внутренний язык команд компьютера (или, как мы уже говорили, на язык кодов). Здесь уместно, впрочем, упомянуть и о том, в чем разница между языками программирования и алгоритмическими языками. А она заключается в том, что последние создавались и создаются по строгим правилам математической лингвистики, тогда как языки программирования свободны от такого ограничения. Например, язык Fortran – язык программирования, а язык Algol 60 в своей стандартной версии – алгоритмический.

3.4. Развитие инженерных расчетов на ЭВМ и формирование среды компьютерных технологий как технологической основы Цифрового инжиниринга с конца 1960-х годов до рубежа XX–XXI века (IV и V этапы)

Итак, к концу 1960-х годов, то есть к концу IV этапа, сформировалась целостная и мощная платформа для технологического прорыва на основе компьютеров, с уже достаточно развитой средой языков программирования, и что, пожалуй, наиболее важно, начали интенсивно развиваться численные методы решения уравнений математической физики. Почему мы говорим ***целостная***? Потому что именно в те, уже далекие, годы сформировался тот подход, который академик А.А. Самарский определил, как триаду

«***Модель – Алгоритм – Программа***»,

о чем мы будем говорить далее. Сейчас мы только отметим то обстоятельство, что Александр Андреевич предельно точно обозначил роль фундаментальной науки, указав на первичность математической модели и численных методов, которые являются основой построения алгоритмов: ***Модель – Алгоритм***. При этом компьютерные технологии в виде программ также были в центре внимания как математиков, так и специалистов в этой области. И сейчас настал момент поговорить о развитии технологий программирования.

От языков программирования к программным комплексам

Массовое использование языков программирования в научных исследованиях, проектировании и инженерном анализе уже в первые годы их внедрения в вычислительные системы показало свои огромные возможности и привело к началу их широкого внедрения во все сферы. Примерно с начала 60-х годов прошлого века начался буквально «бум» решения задач из самых разных отраслей человеческой деятельности на основе применения компьютеров. При этом непрерывно возраставшая сложность решаемых задач приводила к значительным трудностям в «отладке» программ, реализующих их решение. На этом пути сформировалось понимание необходимости выделения классов ***типовых вычислительных задач***. Так в инструментарий исследователей вошли ***пакеты стандартных прикладных программ***. Эффективность и смысл разработки таких программ состояли в том, что они позволяли быстро решать широкие классы типовых задач, настроив (или подставив) при их вызове требуемые параметры. Например, если мы возьмем самый общий случай вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

с использованием какой-либо приближенной формулы [11], наподобие приведенной выше формулы трапеций (2.18), то мы сможем обратиться к стандартной программе, например, такого вида:

integral (*a, b, f, formula, eps*).

Как видим, это обращение к стандартной программе с именем ***integral*** содержит параметры *a* и *b* – границы промежутка интегрирования; *f* – вид функции; параметр *formula*, который указывает, какую приближенную формулу из набора имеющихся в программе ***integral*** мы хотим использовать; и, наконец, параметр *eps* указывает на ту точность, с которой нам требуется вычислить наш интеграл. Конечно, здесь мы только прикоснулись к тому, что такое простейшая стандартная программа, опуская многое из того, что лежит за пределами нашего внимания в данном разделе. Но мы должны отметить, что стандартные программы сыграли весьма важную роль на самых первых этапах ***становления Цифрового инжиниринга, поскольку они в предельно простой и наглядной форме демонстрировали инженерному сообществу возможности применения математического моделирования с использованием компьютерных технологий***.

Вполне понятно, что сначала стандартные программы были ориентированы на решение относительно простых задач, наподобие только что приведенной подпрограммы для приближенного вычисления интеграла. Сюда же мы можем отнести и задачи решения алгебраических и трансцендентных уравнений, линейных алгебраических систем невысокой размерности и так далее. При этом уровень разрабатываемых стандартных прикладных программ непрерывно усложнялся. Они стали приобретать все более широкий характер в направлении решения задач по отраслям наук, например, в области механики деформируемого твердого тела, механики жидкости и газа, биохимии, электромагнетизма и так далее.

Таким образом, в мировом пространстве технологий началось становление мощного пласта программного инструментария в виде ***Программных комплексов*** для естественнонаучного и инженерного анализа, которые получили начало своему развитию как раз на границе обозначенных нами IV и V этапов – в конце 1960-х – начале 1970-х годов.

Понятие программного комплекса тесным образом связано с понятием ***программной системы***, под которой договоримся всюду далее понимать ***системную или прикладную программу, ориентированную на решение какого-либо класса задач, будь то обеспечение работы компьютера или решения на нем прикладных задач***. Понятие программной системы является максимально широким. Вместе с тем под программной системой иногда понимают программу, ориентированную на решение какого-либо широкого класса задач, например, в области аэрогидродинамики или тепломассообмена или, наконец, обеспечивающую визуализацию результатов вычислений.

К программным системам относятся, например, операционные системы – это, пожалуй, наиболее мощный класс такого класса программ. Для нас же принципиально важным является то, что программные системы подразделяют на системные и прикладные. К первым как раз и относятся операционные системы.

Как уже сказано выше, наряду с понятием программной системы сегодня широко используется понятие ***программного комплекса***, особенно в отношении прикладных научно-исследовательских и инженерных задач. Таким образом, в дальнейшем под ***Программным комплексом*** мы будем понимать, ***как правило, универсальную прикладную программную систему для решения какого-либо класса естественнонаучных или инженерных задач от их постановки до получения результатов в требуемой форме, например, в виде их визуализации***.

Итак, программные комплексы также являются программными системами, но отличаются спецификой ориентации, главным образом, на решение естественнонаучных и инженерных задач. Именно в этом их особенность. При этом программные комплексы как раз и являются наиболее полной и последовательной реализацией ключевых аспектов технологий Математического моделирования по А.А. Самарскому в рамках триады «Модель – Алгоритм – Программа», чему посвящена вторая глава нашей работы. Триада «***Модель – Алгоритм – Программа***» в своей сущности есть последовательность шагов в решении каждой задачи.

Здесь уместно вновь вернуться к обсуждению существа понятий ***Математическое моделирование*** и ***Математическая модель***, и различии между ними, о чем мы говорили в разделе 2, упомянув о триаде А.А. Самарского. Именно здесь, при рассмотрении существа триады, различие между этими понятиями проявляется наиболее явно. Действительно, построение Математической модели, как и последующая за ней разработка алгоритма, которые по своему существу есть численная «переформулировка» рассматриваемой модели (её численная модель). И это совершенно самостоятельная и, в определенном смысле, самодостаточная проблема, где компьютерные технологии еще не требуются.

Другое дело – Математическое моделирование, которое своим итогом должно иметь решение задачи, то есть и модель, и результат в форме чисел или в другой форме (график, таблицы). Здесь без вычислителя – компьютера не обойтись, и именно здесь и вступает в работу все множество Компьютерных технологий, которые в триаде обозначены как программа.

Напомним, что, согласно блокам математического моделирования, взаимодействие с компьютером на данном этапе подразумевает перенос алгоритма (вычислительных шагов) на компьютер, последующее решение задачи (математической модели) и обработку результатов. Таким образом, можно попытаться схематизировать рассматриваемые элементы триады А.А. Самарского, блоков концепции Математического моделирования и используемых нами терминов, отражающих актуальную терминологическую и концептуальную среду изучаемого нами вопроса, как это и приведено на рис. 3.3.

Возвращаясь к программному инструментарию, отличные от программных комплексов программы будем относить к иным классам *программ*, уточняя наименование, например, программу для визуализации результатов или программу для распознавания каких-либо образов и так далее. Попутно заметим, что программная система и программный комплекс как её частный случай может включать в себя множество модулей – подпрограмм, нацеленных на решение той или иной подзадачи.

Итак, заканчивая рассмотрение ***четвертого этапа***, мы можем утверждать, что его основополагающим результатом является заложение математической, технологической и компьютерной основы цифрового инжиниринга. Что мы здесь имеем в виду:

- во-первых, накопившееся многовековое богатство постановок задач в инженерном деле и долгие времена неразрешимые математические методы их решения;

- во-вторых, создание самих компьютеров;

- в-третьих, разработку первых поколений программных систем – от мощных операционных систем до начала формирования системы массовой разработки программных комплексов для большинства направлений инженерного анализа и программных комплексов самого разного назначения;

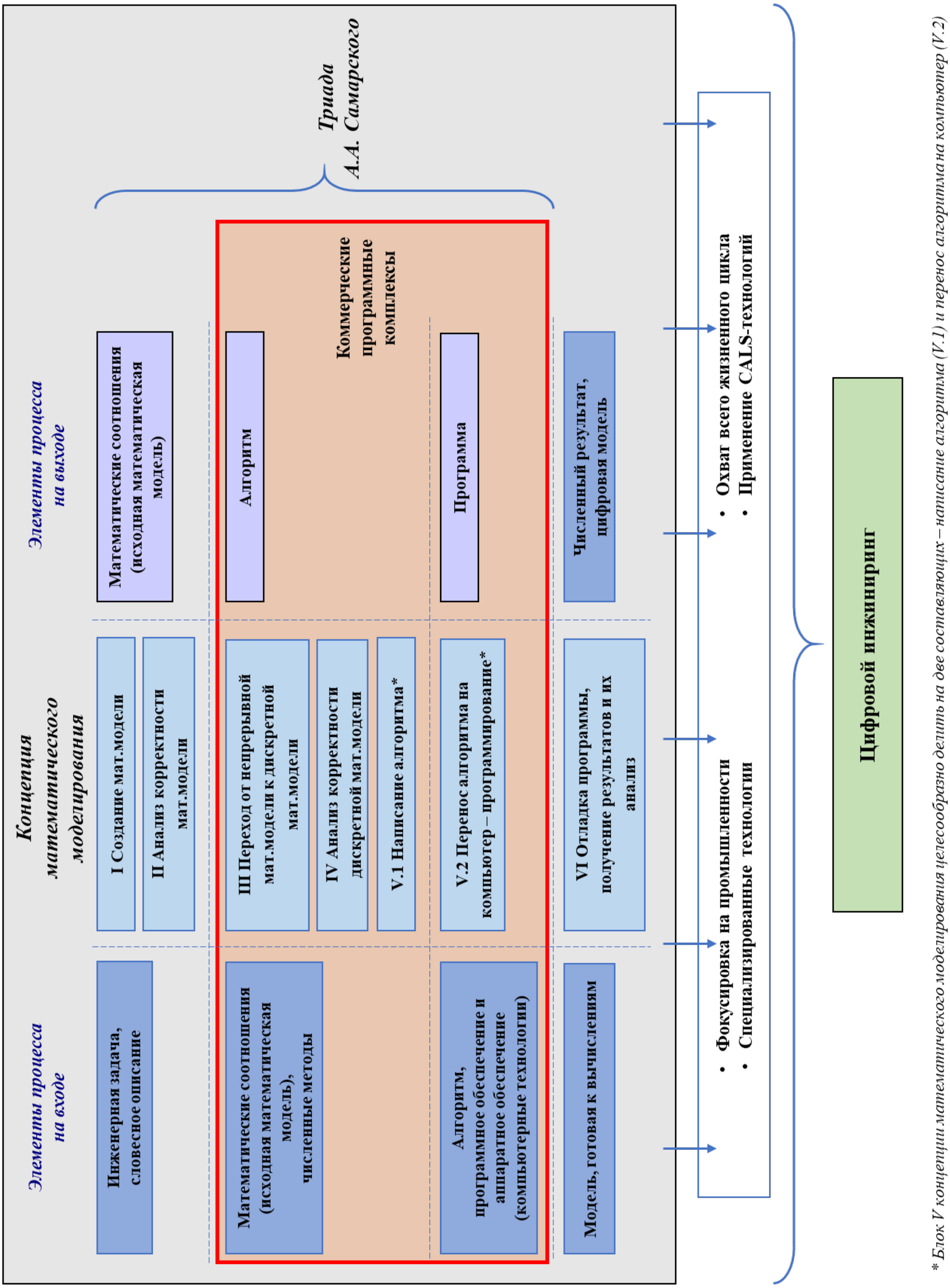

Рис. 3.3 Взаимосвязь рассматриваемых терминов и концепций математического моделирования и цифрового инжиниринга (Источник: составлено авторами)

- и, наконец, в-четвертых, важнейшее для рассматриваемой нами темы, начало процессов выделения в формирующейся системе программных комплексов множества таких, которые, будучи ориентированы на инженерный анализ и проектирование, построены на мощном фундаменте математической физики в виде дифференциальных уравнений в частных производных и вычислительной математики, о чем мы и сказали чуть выше.

Переходя к V этапу в развитии инжиниринга, укажем, что мы связываем его начало с появлением на мировом рынке программных комплексов, ориентированных на инженерный анализ и проектирование. А это как раз 1970 год, когда на мировом рынке появился программный комплекс ANSYS, связанный с задачами механики деформируемого твердого тела. Важно упомянуть, что в 1960-е годы разработке ANSYS предшествовал проект NASA по разработке программного обеспечения, окончательное официальное название которого было NASTRAN (аббревиатура, образованная от NASA Structural Analysis Program).

С момента появления первых программных комплексов быстрыми темпами рос уровень сложности решаемых естественнонаучных и прикладных, главным образом, инженерных задач. Во всем этом многообразии задач исторически, следуя логике перехода от простого к сложному, сначала рассматривались инженерные задачи, постановки которых восходили к великим математикам и механикам XVII–XIX веков. Как правило, такие задачи описывали характеристики машин и физических явлений весьма приближенно. Здесь достаточно упомянуть Ньютоновскую корпускулярную модель потока газа при движении тела с высокой скоростью [18] или гораздо более тонкую модель движения несжимаемой невязкой жидкости, построенную Эйлером, описанную в параграфе 2.3 и выражаемую формулами (2.5) и (2.6) из второй главы. При этом модель Ньютона, несмотря на ее, казалось бы, сугубо упрощенный модельный, а значит приближенный характер, сыграла, да и продолжает играть большую роль в моделировании множества процессов, связанных преимущественно с высокоскоростной газовой динамикой.

На первых этапах использования компьютеров, в продолжение работ предыдущих поколений ученых и инженеров, рассматривались, как правило, плоские (не трехмерные) задачи, существенно более простые в том смысле, что они относительно упрощенно описывали реальные явления и объекты. И такие подходы при их моделировании, как правило, не требовали очень больших вычислительных ресурсов. Поясним это на примере моделирования обтекания крыла самолета, которое имеет конечную длину и на котором рассчитать поле давления в произвольном сечении крыла, то есть в плоской двумерной задаче, значительно проще, чем на всем крыле. Действительно, задача расчета давления для всего крыла является уже трехмерной, пространственной, и для её моделирования требуются значительно более развитые математические модели и, как следствие, весьма мощные вычислительные ресурсы.

В целом же переход от плоских и вообще упрощенных постановок задач к пространственным задачам, отвечающим реальным физическим процессам, был важнейшим этапом как в деятельности научного, так и инженерного сообщества. Именно этот переход послужил началу принципиально нового этапа в человеческой деятельности – человечество начало путь к тому времени, когда мы сможем описывать – моделировать – практически любые процессы в Природе и в технике.

В связи с этим также заметим, что в первую очередь именно моделирование пространственных задач привело к необходимости решения проблем ***визуализации результатов вычислений***. На этом пути был получен качественно новый подход к изучению задач механики, физики, биологии – стало возможным «просматривать» моделируемые процессы – от появления микротрещин в металле, микровихрей в жидкости и «конструирования молекул» с заданными свойствами, до моделирования глобальных атмосферных процессов и тектонических разломов земной коры. Это же привело к прорыву в инженерных расчетах: конструктор, инженер, расчетчик мог видеть, как выглядит разработанная им система в динамике, иначе говоря, в реальных физических условиях! При этом фантастически вырос круг решаемых с использованием прикладных программ задач. Например, только в области биологических и биохимических наук наши коллеги из Научно-исследовательского вычислительного центра МГУ им. М.В. Ломоносова в 2007 году насчитали сотни прикладных программ (восемнадцать лет тому назад!).

И здесь нужно остановиться на одном весьма важном моменте, характеризующем массовое появление на мировом рынке в начале 2000-х годов технологий уже, собственно, компьютерного инжиниринга в виде CAE (Computed Aided Engineering) программных комплексов (систем) [19; 20].

На таких программных комплексах мы останавливаемся подробно по той причине, что именно они породили тот важнейший пласт вычислительных технологий, которые составляют наукоемкую среду компьютерных технологий и являются ядром Цифрового инжиниринга!

За последние практически полвека сформировалась целая отрасль по разработке CAE-программных комплексов, в первую очередь для инженерного анализа и научных исследований. С тем, чтобы понять, каковы роль и масштабы применения программных комплексов в уже ставшей исторической практике исследовательских центров и предприятий, приведем характерный пример и вновь обратимся к началу V этапа развития инжиниринга – 1970-м годам. И здесь естественно обратиться к «прародителю».

А точнее к «прародителям». Чем вызвано такое уточнение? Обычно, когда говорят о тех, кто открыл направление разработки CAE-программных комплексов и вывода их на мировой рынок, начинают с американской компании ANSYS. И мы далее поступим также, поскольку вклад этой компании действительно очень велик, но мы должны знать и отечественных первопроходцев, и здесь нужно назвать научную группу профессора Александра Сергеевича Городецкого (1935–2022 гг.), под руководством которого в начале 1960-х годов был создан программный комплекс ЛИРА [21]. Были разработаны первые программы «Экспресс» и «Мираж» для расчёта строительных конструкций на ЭВМ БЭСМ, а также «М-20» и «Минск-22». Отметим особо, что это 1963 год. В 1975 году был разработан программный комплекс ПК «Лира-ЕС» для ЕС ЭВМ, а в 1991 году – программный комплекс «Мираж», который представлял собой реализацию алгоритмов «Лира-ЕС» на персональных компьютерах в операционной среде DOS.

Теперь обратимся к истории становления и развития программного комплекса компании ANSYS[1] – комплекса, предназначенного для решения задач механики деформируемого твердого тела [22; 23], выбрав

[1] Сегодня под маркой ANSYS на рынке программных продуктов распространяется множество программных комплексов самого разного назначения.

его самые первые версии, и посмотрим на масштабы его использования ведущими научными центрами и фирмами США на пороге веков в 1998–2000-х годах. Все 10 ведущих компаний США (100%) опирались на его использование, из 25 ведущих компаний 75% (с динамикой роста использования комплекса) так же опирались на него, и, наконец, из 100 ведущих компаний почти 70% использовали ANSYS так же с динамикой роста. Подчеркнем, что эти данные – более чем четверть вековой давности, предоставленные лабораторией «Вычислительная механика» [24].

Теперь мы можем подробнее рассмотреть то время, когда, по нашей оценке, ***начался V этап в развитии инжиниринга***. Как мы помним, это примерно 1970 год, и это время мы связали с компанией *ANSYS*. Почему!? Ответим сразу же на этот вопрос.

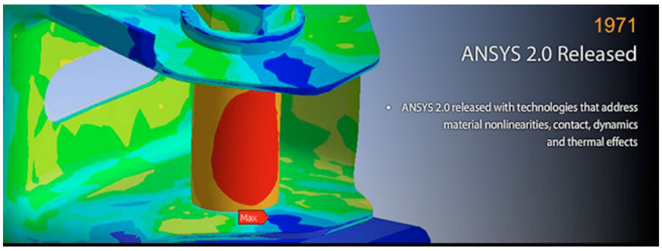

Рис. 3.4 ANSYS Mechanical, 1971 год

В 2025 году компании *ANSYS* исполнилось 55 лет. Её основал *доктор Джон Свэнсон (Dr. John A. Swanson)* в 1970 году, и исходно она называлась *Swanson Analysis Systems Inc. (SASI)*. Можно утверждать, что прародительницей компании была фирма *Westinghouse*, где до создания *SASI* работал доктор *Д. Свэнсон.* Первой публичной разработкой компании была вычислительная система так называемого конечно-элементного анализа[1] *ANSYS* (рис. 3.4) (1971 год). Кратко говоря, это был достаточно универсальный программный комплекс, ориентированный на решение задач механики деформируемого твердого тела.

[1] О том, что такое конечно-элементные методы, рассказываем в Приложении.

Именно с выходом на мировой рынок первого универсального промышленного программного комплекса мы и связали начало V этапа в развитии инжиниринга. При этом вполне очевидно, этот этап может быть охарактеризован как начало полномасштабного внедрения математического моделирования на базе компьютерных технологий в производственную практику.

В 1975 году возможности комплекса *ANSYS* были дополнены моделями для решения геометрически-нелинейных (то есть, упрощенно говоря, для решения механических систем, в которых зависимость между силами и перемещениями нелинейна и связана только с характером взаимного расположения элементов конструкции) и термоэлектрических задач.

В 1981 году на рынок вышла версия программного комплекса *ANSYS* для рабочих станций, по сути дела, первая многопроцессорная реализация – версия комплекса, что посредством увеличения вычислительных возможностей существенно повлияло на расширение круга рассматриваемых инженерных задач. В 1985 году впервые появляются функциональные возможности для решения задач параметрической оптимизации конструкций, а в 1987 году комплекс *ANSYS* впервые реализует цветную графику в расчетах, что существенно улучшает представление приобретающей все большую важность визуализации результатов вычислений. В 1991 году в *ANSYS* реализованы возможности расчетов в области вычислительной гидродинамики (так называемого CFD-анализа, Computational Fluid Dynamic). В 1994 году фирма *SASI* была переименована в *ANSYS, Inc*, а в 1996 году компания *ANSYS, Inc.* вышла на биржу NASDAQ, и к 2010 году ее доход вырос более чем в 10 раз (с 47,1 млн до 516,9 млн долларов), а к 2024 году он превысил 2,54 млрд долл. [22]

Тут самое время отметить, что 2 выпускника Политехнического университета (И. Авдеев и С. Сидоров), выросшие на Физико-Механическом факультете в названной выше лаборатории «Вычислительная механика» (*CompMechLab*®), выигрывали стипендию *Джона Свэнсона* в университете Питсбурга и впоследствии, успешно защитив диссертации, стали работать в *ANSYS, Inc.*

С 2000 по 2008 годы компания активно расширялась, в её состав был успешно интегрирован ряд ведущих компаний, из которых особо отметим компании-разработчиков в области вычислительной гидродинамики, одной из наиболее трудных областей вычислительной механики:

компания *AEA Technology*, система *CFX* (2003 г.),

компания *Fluent, Inc.*, система *Fluent* (2006 г.).

С 2000 года компания *ANSYS, Inc.* долгое время входила в число 200 лучших малых компаний (компании с годовым доходом от 5 млн до 750 млн долларов). Важнейшими вехами с научно-технических позиций были результаты, полученные компанией в 2004 году, когда компания *ANSYS* впервые преодолевает барьер в решении задач, содержащих 100 миллионов неизвестных, и в 2005 году, когда компания разрабатывает так называемый модуль *(**FSI**, Fluid-Structure Interaction, Взаимодействие жидкой (газовой) среды с деформируемым твердым телом)*, позволяющий решать связанные задачи взаимодействия деформируемых твердотельных конструкций с жидкостью и газом. Создание этого модуля положило начало важнейшему этапу в решении инженерных задач – решению важнейших классов обозначенных выше мультидисциплинарных[1] задач, успехи в освоении которых приблизили научное и инженерное сообщества к умению описывать реальный физический мир, а наш мир, мир Природы, как мы уже ранее говорили, глубоко мультидисциплинарный. Через 3 года, в 2008 году, компания *ANSYS* преодолевает эпохальный рубеж в 1 миллиард расчетных ячеек в задаче прикладной аэрогидродинамики.

Чем обусловлено мировое лидерство компании *ANSYS* и её серьёзные и масштабные успехи!? Здесь можно указать на два совершенно равнозначных фактора. Это выверенное и глубокое понимание создателями компании важнейшей мировой тенденции в инженерном анализе и проектировании – опоре на математическое моделирование как на универсальный инструмент описания реального физического мира. И второй фактор (по счету, не по значимости) – это безусловно позитивное влияние естественных регуляторов рыночной экономики, а именно содействие на основе использования разработок компании *ANSYS* созданию конкурентоспособной продукции в кратчайшие сроки.

Здесь характерным примером является заключенное немецкой компанией Volkswagen генеральное соглашение с компанией *ANSYS* (февраль 2010 г.) с целью расширить применение технологий *ANSYS* в деятельности её инженерных подразделений. Стратегическое решение по использованию программного обеспечения *ANSYS* было принято благодаря как широкому охвату круга инженерных задач, так и созданной инновационной платформе *ANSYS Workbench*, позволившей существенно сокращать время разработки продукции.

---

[1] Напомним, что в разделе 2 мы указали на развитие понятия мультидисциплинарности, берущее начало от ранее широко использовавшегося понятия междисциплинарности.

В 2024 году компания Ansys объявила о продаже своих активов компании Synopsys – известному американскому разработчику систем автоматизации проектирования и производства [23].

Итак, как сказано выше, компания *ANSYS* начала свою активную деятельность в 1970 году с разработки программного обеспечения для решения задач в области механики деформируемого твердого тела. Это было 55 лет тому назад, но это уже была вторая половина XX века – время очень больших успехов в создании и развитии методов вычислительной математики, решении задач физико-механики, а также впечатляющих успехов в развитии вычислительных систем. И весь этот огромный пласт знаний и технологий очень удачно использовался компанией *ANSYS*, занявшей доминирующее положение на формирующемся мировом рынке наукоемкого инженерного программного обеспечения[1] (ПО). Причем, как быстро выяснилось, разрабатываемое ПО оказалось широко востребованным большим кругом отраслей промышленности, и круг этот непрерывно расширялся.

И здесь, в дополнение к сказанному выше, важно попытаться глубже провести анализ причин успеха компании *ANSYS*. Думается, что он достигнут на основании следующих важнейших качеств программных комплексов *ANSYS*, которые присущи этим разработкам с выходом на рынок первых продуктов компании:

- Программные комплексы *ANSYS* были исходно единственными конечно-элементными системами с широким охватом явлений различной физической природы: прочность, гидроаэродинамика, теплофизика и электромагнетизм. Это давало возможность решения связанных

---

[1] Под программным обеспечением понимаем совокупность программ, обеспечивающих эффективное использование ресурсов компьютера с помощью системных программ и прохождение прикладных программ на компьютере.

междисциплинарных задач, объединяющих перечисленные выше области. При этом высокий научный уровень руководства компании обеспечивал привлечение в её деятельность самых передовых специалистов со всего мира, как в областях постановок задач, так и в областях численных методов решения этих задач.

- Комплексы *ANSYS* обеспечивали широкую интеграцию и двусторонний обмен данными практически со всеми CAD-системами (см. далее), то есть системами компьютерного проектирования.

- Разработки компании *ANSYS* обеспечивали широкую открытость программных кодов модулей, которая позволяла проводить модифицируемость и дополняемость её программных комплексов.

- Разработки компании *ANSYS* сертифицировались согласно международным стандартам.

- Программные комплексы компании *ANSYS* всегда, с самых первых разработок, характеризовались уникальной по полноте и обширности содержания современной системой текстовой поддержки[1], доступ к которой осуществляется в интерактивном режиме online. Такие системы поддержки, часто носящие уникальный характер, обеспечивают пользователю даже не очень высокой квалификации непрерывную как теоретическую, так и определенную практическую поддержку в процессе его работы с программным комплексом.

И здесь нужно отметить, что именно в это время, то есть примерно в 2010 году, в инженерном сообществе активно начинает звучать идея о технологиях «проектирования на основе моделирования» (***Simulation Driven Product Development***), которая к тому времени уже применяется практически во всех отраслях промышленности для ускорения процесса

[1] Это означает, что практически все формулы и специальные термины сопровождались подробными пояснениями.

разработки продуктов и времени вывода изделий на рынок. Здесь нужно указать и на то, что в среде передовых инженеров в то же время формируется понимание того, что в сегодняшних постоянно меняющихся условиях и растущих требованиях к разработкам недостаточно только лишь опыта и нужно использовать новые инструменты, которые позволяют решать задачи, встающие перед производством на новых передовых уровнях.

О формировании системы программных комплексов для естественнонаучного и инженерного анализа и их развитии

Что касается самого «прародителя» комплекса ANSYS, то он проник из своей «материнской» области – механики деформируемого твердого тела применительно к ядерной энергетике[1] – во все области промышленности, завоевав прочные позиции по всему миру. Сегодня направление работ, сформированное многие десятилетия тому назад корпорацией ANSYS, является одним из наиболее востребованных на мировом рынке программного обеспечения в области инженерного анализа и проектирования, где разрабатывается масса программных комплексов для самых разных поднаправлений. На данное время этими разработками пользуются многие десятки тысяч клиентов по всему миру. Здесь и названная «материнская» область – механика деформируемого твердого тела, и аэрогидродинамика, и задачи из области электродинамики, и многие-многие другие. При этом важно еще раз подчеркнуть, что развитие программных комплексов вот уже многие годы идет в направлениях ***мультидисциплинарности***, это означает, что они все более и более адекватно описывают окружающий нас физический мир.

[1] Напомним, что у истоков создания компании ANSYS была компания Westinghouse Electric.

Еще раз остановимся на понятии мультидисциплинарности, требующей пояснения в силу его особой важности. На первый взгляд, это понятие вполне очевидно, ведь речь идет об описании процессов, в которых учитываются, например, взаимодействие упругого тела с полем давления движущейся жидкости или газа, т.е. описываются во взаимосвязи два этих процесса. Но глубинный смысл этого понятия намного значительнее, ведь ***безграничное развитие понятия мультидисциплинарности – прямой путь к предельно корректному описанию реального физического мира***, о чем мы говорили выше. Но такое описание как раз и есть реализация ***мультидисциплинарности*** в самом широком смысле, т.е. учет ***абсолютно всех граней – составляющих*** физических процессов, происходящих в нашем мире.

Мультидисциплинарность требует решения очень сложных, глубоко взаимосвязанных задач математической физики. При этом, как правило, все участвующие в описании процесса (процессов) уравнения в силу их взаимосвязанности решаются совместно, что требует очень больших вычислительных ресурсов. Отсюда следует, что как проблемы познаваемости нашего мира, так и вопросы создания передовых машин, систем и технологий могут быть решены, главным образом, на основе методов математического моделирования, в которых не обойтись без огромных объёмов вычислений. Именно на этом пути мы приходим к необходимости использования суперкомпьютерных технологий [25–28].

Возвращаясь к собственно компьютерным технологиям, укажем на то, что появление такого универсального инструментария, как программные комплексы, применительно к самым разным отраслям знания и инженерного дела привело к началу формирования поистине революционной ситуации в изучении человеком Природы и её преобразования в интересах человеческого сообщества. Эта принципиальная и весьма важная мысль требует детального пояснения. С развитием технологий математического моделирования и их важнейшего инструмента – компьютерных технологий – человечество, как было сказано выше, обрело способность решать любые ***корректно поставленные*** задачи. Конечно, ключевым для внимательного читателя здесь является слово ***«корректно»***! О его значении в математическом моделировании мы уже достаточно подробно говорили во втором разделе, где только прикоснулись к лежащим на поверхности ключевым составляющим понятия корректности. Но корректность подразумевает, в частности, и ***предельно*** (как и сказано выше) высокую точность математической модели, описывающей то или иное явление или процесс. Например, модель должна с требуемой точностью описывать те или иные стороны природных или технических (технологических) процессов и их текущие или итоговые характеристики. А это, опять-таки, математика в форме каких-либо количественных соотношений, то есть дифференциальных уравнений, обыкновенных или в частных производных, интегро-дифференциальных, или алгебраических уравнений, или иных соотношений!

Таким образом, вслед за понятием мультидисциплинарности мы подошли к еще к одному фундаментальному понятию при описании явлений Природы и всего множества инженерных разработок – к понятию ***мультимасштабности***, под которой понимаются математические технологии постановки задач, в которых рассматриваются различные физико-механические или иные процессы ***существенно различных характерных масштабов***.

Продолжая эту цепочку, мы приходим к еще одному важнейшему понятию, которое связано с собственно процессами производства, – это понятие ***мультитехнологичности***. Его смысл вполне очевиден – практически все передовые высокотехнологичные отрасли промышленности, будь то авиакосмическая, автомобильная или иная, представляют собой совокупность технологических цепочек. Каждая из этих цепочек, по существу, есть какая-либо технология, построенная из совокупности звеньев-технологий, основанная на тех или иных физических принципах. При этом, как правило, сегодня все эти процессы – технологии – реализуются на основе и под управлением компьютерных систем.

Теперь, вновь возвращаясь к программным комплексам, отметим, что за прошедшие десятилетия, с начала их внедрения в научные исследования и промышленные разработки, они претерпели очень большую эволюцию. Невероятно возросли их возможности в части всех аспектов в постановках задач, численных методов их решения и высокой наглядности в выводе результатов. При этом мы уже имеем не программные комплексы, а некоторые среды разработок, имеющие очень развитый вспомогательный инструментарий. Более детально мы поговорим об этом немного далее.

В заключение же отметим, что проблемы как мультидисциплинарности, так и мультимасштабности требуют не только иных постановок задач в сравнении с традиционными, но, в подавляющем большинстве случаев, принципиально новых постановок, не рассматривавшихся в силу трудностей или вообще не известных ранее. Здесь, в частности, можно указать на то, что задачи традиционной современной механики и механики микромира принципиально различны.

Но и, как следствие, все это порождает необходимость разработки во многих случаях принципиально новых методов решения таких классов задач, где проблемой является как создание собственно математических процедур при постановках задач, так и численных методов их реализации. Укажем в связи с последним, что уже сегодня нормой при разработке передовых изделий в промышленности является решение задач с многими миллиардами неизвестных. А это, в свою очередь, многократно увеличивает требования высокой производительности в вычислениях уже, конечно, не к компьютерам, а к *супер*компьютерам.

3.5. Основные характеристики инжиниринга, сформированные в процессе его становления и развития к настоящему времени

Теперь мы постараемся выявить основные тенденции в развитии инжиниринга, основные черты которых сформировались уже к концу 60-х – началу 70-х годов прошлого века. В предыдущем пункте мы достаточно детально рассмотрели развитие программных комплексов на примере комплекса ANSYS, не забывая при этом и об отечественных разработках – вспомним комплекс Лира, а ведь это 1963 год.

Но параллельно, а в ряде случаев и ранее CAE-систем на мировом рынке программных комплексов появились и другие программные комплексы, ориентированные на проектно-конструкторскую практику. Это были так называемые CAD (Computer Aided Design) – системы компьютерного проектирования. Как развивались эти и другие сферы, прямо связанные с проектированием, инженерным анализом и вообще с производственным циклом, и рассмотрим далее.

Триада CAD-, CAE-, CAM-технологий и становление Цифрового инжиниринга с 2000-х годов по настоящее время (V и VI этапы)

Итак, мы уже сказали, что помимо CAE-систем, которые вносят основополагающий вклад в формирование цифрового инжиниринга, существует ряд других программных комплексов, главным образом применительно к проектированию, но отчасти и к инженерному анализу, преимущественно к подготовке вычислений. Первыми простейшими разработками в области проектирования, появившимися на мировом рынке больше 40 лет тому назад, были уже названные CAD – системы компьютерного проектирования. Их массовое появление предшествовало появлению CAE-систем математического моделирования, которые принято называть системами компьютерного инжиниринга, что легко объяснимо. Электронные кульманы, как на первых порах часто именовали CAD-системы, оказались невероятно удобными для конструкторского сообщества, поскольку радикально упростили работу по подготовке чертежей. Действительно, «черчение» и правка разрабатываемого изделия на большом экране, с последующей распечаткой итогов на большом же графическом принтере, сделали работу конструктора-проектировщика не просто удобной, но и чрезвычайно эффективной. При этом разработка самих CAD-средств, получивших быстрое признание, не представляла принципиальных трудностей, поскольку их создание не являлось высоко наукоемким. В то же время построение сначала плоских, то есть двухмерных, а затем пространственных – трехмерных – геометрических моделей объектов способствовало упрощению последующей процедуры – перехода непрерывной математической модели к некоторому её дискретному аналогу. Об этой важнейшей части технологий математического моделирования мы говорили в разделе 2, описывая её III блок.

Действительно, когда построен геометрический образ объекта (или его геометрическая модель), существенно проще проводить его дальнейшее разбиение, например, на прямоугольную сетку или на так называемые конечные элементы [29; 30] (см. также Приложение) для последующего численного решения на их основе соответствующих уравнений, описывающих характеристики нашего объекта. А последнее есть функция программных комплексов для инженерного анализа, то есть CAE-систем.

Именно тогда, в начале 2000-х годов, в лексиконе отечественных исследователей и инженеров впервые стали появляться аббревиатуры CAE и CAD – технологии [19; 20], которые мы упрощенно будем называть компьютерный инжиниринг и компьютерное проектирование соответственно. Пожалуй, именно это время, как говорилось ранее, мы и можем считать временем начала отсчета нарастающего внедрения компьютерных технологий в сферу отечественного материального производства.

Итак, мы рассмотрели два класса появившихся в руках инженеров систем: CAD- и CAE-системы (технологии), кратко описав их предназначение. При этом следует заметить, что CAD-программные системы в некотором роде «сходят со сцены», поскольку их инструментарий встраивается во многие передовые CAE-системы.

Появление CAD- и CAE-программных систем сразу же породило естественный вопрос о том, как использовать полученные по итогам их использования результаты!? Отметим, что эти результаты имеют цифровой (электронный) формат. И на пути их использования практически сразу же появились так называемые CAM-системы (Computer Aided Manufacturing – Компьютеризированная подготовка производства). Говоря несколько упрощенно, CAM-системы на основе работы CAD- и CAE-систем создают электронные базы данных, которые служат источниками информации для технологических процессов производства, в частности для работы групп станков с числовым программным управлением.

Таким образом, примерно 25 лет тому назад в мировой индустрии сформировалась наукоемкая цепочка CAD-, CAE-, CAM-систем (технологий), которая превратилась в важнейшую мировую тенденцию развития высоких технологий на рубеже XX и XXI веков. Почему же этот новый подход может быть охарактеризован как революционный, и что принципиально или даже радикально нового он принес в сферу материального производства? Тут нужно, следуя нашей традиции исторического взгляда, попытаться понять технологическое существо складывавшегося веками традиционного подхода к разработке в промышленности.

Посмотрите на один из первых паровозов первой крупной российской железной дороги (Рис. 3.5.), связывающей Санкт-Петербург и Москву, открытой в ноябре 1851 года, – это чрезвычайно сложное изделие, этапы разработки которого практически ничем не отличались от этапов разработок локомотивов нашего времени. Главное в существе этих разработок – определенная последовательность шагов. Это и идея

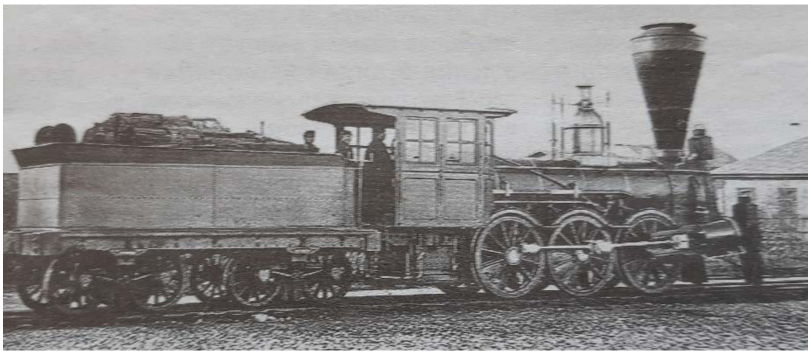

Рис. 3.5 Паровоз, курсировавший между Москвой и Санкт-Петербургом

создания изделия, и его ***проектирование***, воплощенное в некоторой итоговой проектно-конструкторской модели, и, наконец, усложнявшиеся из века в век ***инженерные расчеты***, – все эти этапы выполнялись последовательно, шаг за шагом.

Внедрение компьютерных технологий привело к интеграции всех этих этапов, при которой оказалось возможным вносить изменения, корректировать разработку изделия на всех этапах его создания вплоть до материального воплощения. Этот подход вполне справедливо получил название «***параллельное проектирование***» (concurrent engineering). Как нетрудно видеть из сказанного, в основе этого подхода лежит идея совмещенного во времени компьютерного проектирования изделия (CAD – design), выполнения системы инженерных расчетов (CAE – engineering) и, наконец, подготовки производства (CAM – manufacturing), что позволяет использовать компьютеризированные проектные данные, начиная с самых ранних стадий проектирования и инженерного анализа, причем в процессе параллельной работы инженеров-конструкторов, инженеров-расчетчиков и инженеров-технологов. И, безусловно, тотальное внедрение такого подхода явилось революционным шагом в развитии материального производства.

Таким образом, появление компьютерных технологий и последующее развитие их применения в промышленности привело к началу кардинальной смены основ всей системы технологий в этой сфере человеческой деятельности. Действительно, как мы только что убедились, формирование цепочки CAD-, CAE-, CAM-технологий привело к началу системы определенного сегментирования производства продукции, как-то проектирование – это одно направление, инженерный анализ – другое направление, а формирование электронного облика изделия для передачи его в производство – это третье направление сегментирования производства. Но это сегментирование, как мы помним, в некотором смысле условно, поскольку электронный формат изделия на каждой из этих стадий позволяет работать со всеми названными форматами одновременно, реализуя технологии параллельного проектирования. Это важнейшее обстоятельство, которое коренным образом отличает подход параллельного проектирования от сложившегося за многие века последовательного способа разработки изделий, когда работа идет шаг за шагом, и внесение корректив на данном шаге в разработку, проделанную на предыдущих шагах, как правило, приводит к существенным изменениям на последующих шагах.

Таким образом, формирование триады CAD-, CAE-, CAM-технологий было решающим шагом и недостающим звеном для начала перехода мировой индустрии к автоматизированному проектированию и производству.

Но, как нетрудно видеть даже не очень хорошо знакомому с производством человеку, за пределами этой триады остались такие важнейшие сегменты производственного цикла, как управление поставками материалов и комплектующих, контроль процессов управления производством, обслуживание изделий в процессе их эксплуатации и ряд других важных аспектов. При этом здесь уже нужно говорить не столько о разработке и изготовлении изделий, а скорее о раскрытии детализации их жизненного цикла.

Система CALS-технологий и триада CAD-, CAE-, CAM-технологий как её наукоемкое ядро

Представляется, что важнейшим результатом ***пятого этапа*** в развитии инжиниринга является ***начало и нарастающее развитие широкомасштабных работ по созданию и совершенствованию программных систем*** практически по всем направлениям естественнонаучного и инженерного анализа.

Оставалось сделать только один, но трудный и масштабный шаг для полной интеграции программных средств с целью создания инструментов для реализации полностью компьютеризированного производственного цикла.

И здесь основополагающая идея систематизации на базе компьютерных технологий процессов непрерывной поддержки жизненного цикла изделий и всего многообразия поставок для него легла в основу системы CALS-технологий (Continuous Acquisition and Life cycle Support), пик развития и внедрения которой в индустрию пришелся так же примерно на рубеж веков – где-то около 2000 г.

И именно с начала 2000-х годов, с момента ***становления системы CALS-технологий***, которые и были ориентированы на ***создание полностью компьютеризированного производственного цикла***, мы можем отсчитывать время начала ***шестого этапа*** в развитии инжиниринга.

Существо CALS-технологий состоит в разработке и создании в кратчайшие сроки новых конкурентоспособных изделий на основе компьютерных технологий с помощью электронного обмена данными по всем звеньям цепи жизненного цикла продукции: Заказчик – Разработчик – Поставщик – Пользователь. Отметим, что традиционное определение же CALS-технологий как ***интегрированных*** **технологий** обусловлено широкой связностью – интеграцией, с помощью современных сетевых технологий, их главных составляющих – вычислительных, информационных и телекоммуникационных технологий.

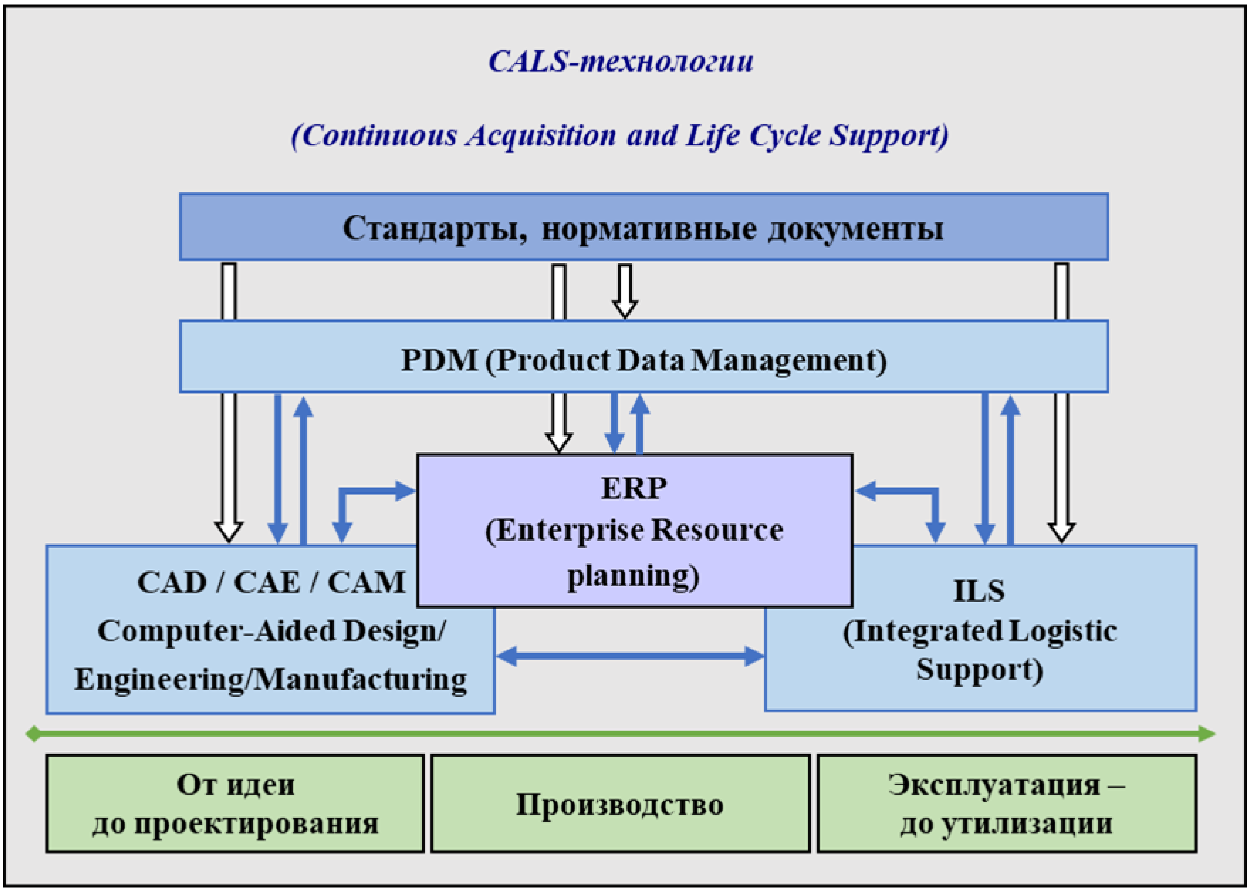

Рис. 3.6 Схема CALS-технологий (Источник: Лаборатория «Вычислительная механика» [24])

На рис. 3.6 приведена схема CALS-технологий, предоставленная авторам руководителем лаборатории «Вычислительная механика» А.И. Боровковым более 20 лет тому назад. Важно особо отметить, что возникшая, как было сказано, для поддержания жизненного цикла создания и эксплуатации высокотехнологичных изделий система CALS-технологий достаточно быстро приобрела тотальный характер применительно практически ко всем отраслям промышленности.

Обращаясь к научно-техническому содержанию CALS-технологий, выделим важнейшие, тесно связанные между собой блоки (рис. 3.6):

- ERP-технологии (ERP, Enterprise Resource Planning) – технологии управления предприятием и планирования ресурсами, предназначенные для решения всего спектра организационно-технических задач производства. Эти задачи решаются с использованием многопользовательских баз знаний и данных в рамках единой информационной среды предприятия и/или отрасли промышленности.

- PDM-технологии (PDM, Product Data Management) как технологии управления данными об изделии тесно связаны с триадой CAD-, CAE-, CAM-технологий, обеспечивая непосредственную её реализацию в процессе производства. Именно PDM-технологии осуществляют организацию и обеспечение доступа к данным и управление теми данными, которые относятся к продуктам производства, а также для управления жизненным циклом этих продуктов.

- ILS-технологии (ILS, Integrated Logistic Support) – технологии интегрированной логистической поддержки, которые обеспечивают информационную поддержку изделия в эксплуатационных условиях – управление потоками запасных частей, ремонтом и обслуживанием изделий в условиях эксплуатации.

В рамках ERP-, PDM- и ILS-технологий главным образом сосредоточены интересы экономической науки – управление производством, управление ресурсами, проблемы стандартизации и унификации и т.д.

Заметим, что на схеме не приведены такие важные элементы жизненного цикла изделия, как формирование идеи, связанной с зарождением изделия, и технологии его утилизации.

Итак, из сказанного видно, что с естественнонаучной точки зрения или, говоря точнее, с позиций фундаментального знания, важнейшим элементом всей структуры CALS-технологий является триада CAD-, CAE-, CAM-технологий. Именно она обеспечивает научно-технический уровень разработок.

Отметим еще одно важное обстоятельство, указав на то, что на основе выполнения каждого из обозначенных выше компьютерных этапов – форматов мы получаем отдельный Цифровой образ изделия, который от формата к формату становится, если так можно выразится, все более «насыщенным» («богатым»), то есть многогранным и описывающим все больше разнообразных свойств разрабатываемого изделия. Здесь идеальным, иллюстрирующим примером служит выполненный в системе CAD геометрический образ изделия – его схема. Затем этот образ серьезно усложняется после проведения на основе CAE-систем необходимых вычислительных шагов для получения характеристик изделия, а в будущем и для полномасштабной оптимизации этих характеристик и так далее. То есть мы получаем последовательную цепочку усложняющихся цифровых образов изделия.

Укажем также и еще на одно обстоятельство. Отметив, что триада CAD-, CAE-, CAM-технологий является наукоемким ядром процесса разработки изделий, мы «погрузили» это ядро в систему жизненного цикла создания продукции – в систему CALS-технологий. А это самый «богатый» электронный образ изделия, включающий уже все этапы его жизни – от идеи его создания до его утилизации. Такой системный подход сформировался около 30 лет тому назад и с момента своего становления претерпел весьма существенные изменения.

О становлении и развитии Цифрового инжиниринга в нашей стране

Данный пункт является логическим продолжением предыдущих пунктов этой главы и главы 2. Напомним, что глава 2 в большей мере посвящена «естественнонаучному знанию…», тогда как глава 3 рассматривает средства вычислительной техники и связанные с ними математическое и программное обеспечение компьютеров (отметим, что математическое программное обеспечение и системное программное обеспечение – это, вообще говоря, не одно и то же[1], чего мы уже касались выше, обсуждая «триаду» А.А. Самарского).

При этом у читателя может появиться вопрос о том, а какое, казалось бы, отношение к цифровому инжинирингу имеют две последние позиции нашего рассмотрения, а именно математическое и системное программное обеспечение? Цифровой инжиниринг плоть от плоти математическое и программное обеспечение, причем одно из самых наукоемких. Действительно, Цифровой инжиниринг на вычислительной системе может быть реализован только посредством математического и системного программного обеспечения (ПО).

При этом имеется очень много тонких мест, являющихся точками пересечения как математических проблем постановки задач, так и особенностей их программных реализаций на компьютерах. А если посмотреть на весь производственный цикл, притом не только на высокотехнологичных производствах, то перед нами открываются

[1] Математическое обеспечение ЭЦВМ, как правило, связано с прикладными задачами и прямо реализует математические методы, тогда как программное обеспечение ЭЦВМ традиционно связывают с проблемами управления ЭЦВМ, прохождением на ней потоков задач, вводом и выводом данных и обеспечением работы ЭЦВМ в сетях.

безграничные горизонты тотальной автоматизации производства за счет Цифровизации на основе внедрения программных систем.

Таким образом, можно говорить, что в «основе» Цифрового инжиниринга лежат:

- естественнонаучное знание в виде математики, физико-механики и других наук, на основе чего формулируются постановки задач и разрабатываются алгоритмы их решения;

- средства вычислительной техники, ЭЦВМ – компьютеры и суперкомпьютеры;

- математическое или программное обеспечение ЭЦВМ, позволяющее эффективно реализовывать алгоритмы решения рассматриваемых задач, обеспечивать необходимый для их решения ввод и вывод данных, а также максимально полно использовать ресурсы (возможности / мощность) самих компьютеров.

В связи со всем сказанным и с учетом тех проблем, которые встали перед нашей страной сегодня, безусловно, важным является обращение к отечественному опыту становления и развития цифрового инжиниринга.

Если говорить о фундаменте, теоретических основах как собственно методов математического моделирования, так и опыта разработки программного обеспечения, в первую очередь в области CAD-, CAE-, CAM- технологий, то, несмотря на драматически ошибочное решение о копировании системы IBM 360 в 1970-е годы и, как следствие, катастрофическое отставание в развитии ЭВМ и драматические же последствия развала СССР, названный фундамент хотя и имел «трещины», но сохранился. В большой мере это обусловлено огромным заделом отечественных научных школ в XX веке. В первую очередь это относится к научной школе академика А.А. Самарского, о которой мы уже говорили ранее в нашей работе.

Как указывалось, в конце 1970-х – начале 1980-х годов, то есть за 30 лет до рассматриваемого первого десятилетия XXI века, Александр Андреевич Самарский становится, по сути дела, создателем и идеологом концептуального подхода к применению технологий математического моделирования в естественнонаучном и инженерном знании [1–3]. А ведь именно естественные науки служат источником технологий во всех сферах индустрии. Академик А.А. Самарский прилагал большие усилия для широкого внедрения методов математического моделирования, его ученики и соратники вспоминают, что он называл методологии математического моделирования «интеллектуальным ядром информатики», ***ставя во главу угла фундаментальное математическое начало***.

Благодаря большому научному авторитету Александра Андреевича Самарского, благодаря его таланту публициста [1; 2] прилагавшиеся им усилия, несмотря на имевшие место катаклизмы в развитии страны, безусловно, положительно отразились на формировании как прикладного программного инструментария, так и платформы компьютерных технологий, на основе которой сегодня происходит становление Цифровой экономики в нашей стране. Думается, что академик А.А. Самарский внес неоценимый вклад в продвижение и развитие самых передовых математических методов и компьютерных технологий в отечественной науке и индустрии [31]. Учитывая выдающуюся роль Александра Андреевича Самарского в становлении математического моделирования и вычислительной математики в нашей стране, укажем на статью, подготовленную его соратниками к столетнему юбилею выдающегося ученого [32].

Поучительно коснуться причин российского отставания в сфере разработок в областях цифрового инжиниринга. Вне сомнения, проблемы такого отставания порождены катастрофой развала страны в 1991 году и последующими «реформами» в области экономики. При этом в годы, предшествующие 1985 году, у нас был мощный научно-технический потенциал, который мог служить хорошей основой для разработок в сфере цифрового инжиниринга. Здесь достаточно вновь упомянуть деятельность А.А. Самарского, в частности, его статью, опубликованную в 1983 г. [31], когда в мире еще было очень далеко до осознания важности названного выше «проектирования на основе моделирования». В этой работе Александр Андреевич писал о непрерывно возрастающей роли математического моделирования для всех отраслей экономики, и только ***отсутствие эффективных экономических механизмов*** не позволяло создавать инструменты, подобные разработкам фирмы *ANSYS*. При этом о нашем большом и даже уникальном потенциале говорит, опять-таки, пример нашего родного Политехнического университета. Упомянутая выше лаборатория «Вычислительная механика» (CompMechLab®) [24], возглавляемая профессором А.И. Боровковым, одним из вдохновителей развития цифрового инжиниринга в высшей школе и промышленности, за период 2002–2010 гг. одержала четыре (!) победы в престижнейших *ANSYS*-конкурсах (в 2003, 2004, 2008 и 2009 годах). Причем такого достижения нет ни у одной из 90 фирм, которые побеждали в *ANSYS*-конкурсах. А ведь среди этих 90 компаний представлены такие всемирно известные фирмы, как Airbus, Alstom, Ferrari, GE Oil & Gas (сейчас – GE Vernova), German Aerospace Center, NASA Glenn Research Center, Robert Bosch Kft., Siemens Power Generation (сейчас – Siemens Energy) и другие.

Вывод, который отсюда может быть сделан – мы в России ***можем почти все, или даже вообще все, при умелом и грамотном руководстве*** и ***отличной естественнонаучной (читай: физико-математической) подготовке инженерного корпуса.***

Вновь упомянув о триаде «Модель – Алгоритм – Программа», определенной А.А. Самарским, мы неявно перешли к вопросу о том, как развивалось внедрение математического моделирования в нашей стране. Прежде всего мы должны еще раз отметить, что, с точки зрения теоретических основ, отечественная наука была на высоте.

В связи с этим, безусловно, важным является обращение к отечественному опыту в данной области, который аккумулировался главным образом научной школой академика А.А. Самарского, о чем мы говорим на протяжении всей нашей работы. Действительно, только одни концептуальные идеи А.А. Самарского и его публицистическая деятельность по их воплощению убедительно показывают это. Достаточно указать на такие публикации Александра Андреевича и возглавляемого им научного коллектива:

1. ***Самарский А.А., Курдюмов С.П., Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г.*** Нелинейные явления и *вычислительный эксперимент*. Научные обзоры. Вестник АН СССР, № 9, с. 64–77.

2. ***Самарский А.А.*** Введение в теорию разностных схем. «Наука», М., 1971, 553 с.

3. ***Самарский А.А., Андреев В.Б.*** Разностные методы для эллиптических уравнений. «Наука», М., 1976, 350 с.

4. ***Самарский А.А.*** Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Вестник АН СССР, 1979, № 5, с. 38–49.

5. ***Самарский А.А.*** Вычислительный эксперимент в задачах технологии. В Президиуме Академии наук СССР. Научное сообщение, 1984, с. 77–88.

6. ***Самарский А.А., Михайлов А.П.*** Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., М.: Физматлит, 2001, 320 с.

7. ***Самарский А.А.*** Вести широкую пропаганду идей и методов вычислительного эксперимента. Вестник АН СССР, 1981, № 3, с. 61–65.

8. Проблемы использования вычислительной техники и развитие информатики. Доклад академика ***А.А. Самарского***, 1985, с. 57–69.

9. ***Самарский А.А.*** Проблемы применения вычислительной техники. Вестник АН СССР, 1984, №11, с. 17–29.

Все приведенные работы содержали самые передовые идеи по внедрению вычислительного эксперимента в нашей стране, при этом крайне важным было то, что во главе этого направления стоял очень крупный математик, ***видевший все стороны и глубинные проблемы такого внедрения***. Особо отметим ключевой доклад академика А.А. Самарского на Президиуме АН СССР в 1984 году, где прямо указывается, что одной из важнейших задач, стоящих перед учеными, является совершенствование технологических процессов в промышленности, что являлось особо актуальным начиная с 1980-х годов, когда во весь рост встала проблема переоснащения отечественной индустрии на новой технологической базе [33].

Но и это не все – отечественная математическая наука в части математической физики была на самых передовых позициях. И мы уже говорили, что именно эта отрасль математики имеет определяющее значение для описания большинства физических процессов, и упомянули крупнейших отечественных ученых, внесших в это направление математики неоценимый вклад.

Инструментарий мирового рынка прикладных программ рос чрезвычайно быстрыми темпами. Представляется, что здесь наш Политехнический университет был одним из лидеров работ по этому направлению в нашей стране, а в самом вузе оно активно развивалось с самого начала 2000-х годов на Физико-Механическом факультете.

Конечно, и у нас в Советском Союзе, и других странах велись аналогичные работы, но справедливость требует сказать, что именно компания *ANSYS* сыграла одну из лидирующих ролей в запуске мировой тенденции разработки программных комплексов для инженерного анализа. Тема создания и развития таких программных комплексов чрезвычайно обширна и достаточно давно рассматривалась отечественными авторами. Но, как говорил великий Гете: «…суха теория, мой друг, а древо жизни зеленеет…», поэтому теперь мы оставим в стороне теоретические проблемы, которые решают разработчики такого программного обеспечения, и расскажем об их применении на примерах характерных задач, опираясь на наш собственный опыт. Выше мы упомянули об опыте Политехнического университета в области CAE-технологий [19; 27]. Как мы писали выше, полномасштабные работы в этом направлении начались примерно с конца 1990-х годов – начала 2000-х годов на Физико-Механическом факультете в лаборатории «Вычислительная механика» (CompMechLab®). Насколько известно авторам, именно здесь впервые в России широко начали использовать комплекс *ANSYS Mechanical* для решения задач в области механики деформируемого твердого тела. Интересна и поучительна та

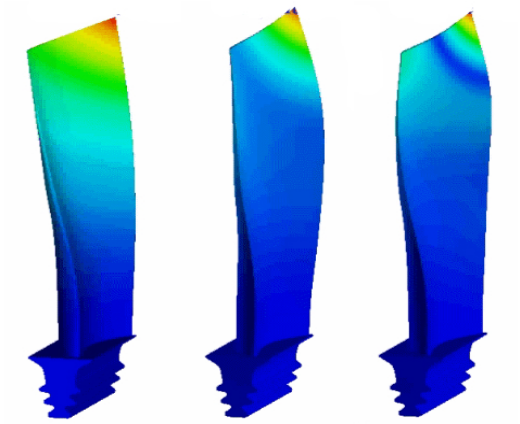

Рис. 3.7 Собственные формы колебаний

аргументация, которая тогда, уже более чем 20 лет тому назад, приводилась авторами при общении с многими коллегами как у нас в Политехническом университете, так и за его пределами. Именно тогда руководитель лаборатории «Вычислительная механика» профессор А.И. Боровков, начал пропагандировать идею о том, что «…попытка писать свои программы для решения многих задач быстро показывает малую эффективность такого подхода в сравнении с уже многократно апробированным, а значит верифицированным программным обеспечением». «При этом удается резко ускорить время решения конкретных задач по заказам промышленности, что, естественно, как увеличило нашу конкурентоспособность, так и ускорило разработку новых изделий предприятиями-партнерами», – продолжал Алексей Иванович. Одной из первых характерных работ, с которых в лаборатории «Вычислительная механика» (CompMechLab®) «все начиналось», была задача об определении амплитудно-частотных характеристик лопатки, закрепленной у основания по нижней поверхности хвостового соединения. Это был 1999 год [24]. На рисунке 3.7 приведены три первые собственные формы колебаний лопатки турбины (слева направо). Хотя, по словам разработчиков, эта задача была относительно простая в сравнении с сегодняшними работами, тем не менее, она показала всю эффективность новых методологий, развиваемых на основе программных комплексов для решения задач механики деформируемого твердого тела.

Совершенно аналогичная ситуация складывалась и в решении задач механики жидкости и газа, где на первых порах, то есть около двадцати лет тому назад, доминировали программные комплексы для инженерных расчетов в области гидроаэродинамики. В лаборатории «Прикладная математика и механика», возглавляемой одним из авторов Ю.Я. Болдыревым, первые работы были связаны с расчетом устойчивости судопропускных сооружений системы защиты Санкт-Петербурга от наводнений.

На рис. 3.8 приведены линии тока, обтекающие створку ворот, перекрывающих канал (так называемый батопорт). Обнаруженные в расчетах эффекты подтвердили появление колебаний батопорта, связанных со срывом вихрей с его нижней кромки, как это видно на рис. 3.8. Расчеты велись с использованием одной из первых многопроцессорных машин Политехнического университета, у которой было задействовано от 8 до 16 процессоров. Это был 2003 год.

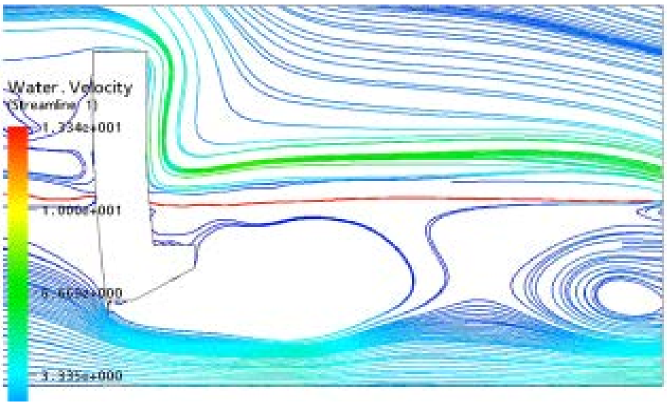

Рис. 3.8. Обтекание затвора судопропускного сооружения

И таких примеров решения важных и трудных, востребованных индустриальных задач, которые велись в лабораториях Физико-Механического факультета (сегодня института) «Вычислительная механика» (CompMechLab®) и «Прикладная математика и механика», более двадцати лет тому назад, имелось множество. Здесь важно подчеркнуть ключевое обстоятельство – обе лаборатории были созданы на Физико-Механическом факультете, важнейшей и характерной чертой которого с момента его основания в 1919 году была глубокая фундаментальная естественнонаучная подготовка будущих инженеров – инженеров с исследовательским характером их деятельности.

Теперь кратко остановимся на том, как ***обстоит*** дело с разработкой ключевых отечественных программных средств цепочки-триады CAD-CAE-CAM. Мы не опиcáлись и будем говорить именно о том, как обстоит дело с ***разработкой***, поскольку в 1990-е и 2000-е годы, вплоть до начала первого десятилетия XXI века, указанные в триаде направления почти не разрабатывались, а то, что было сделано во времена СССР, в большой мере устарело по причине массовой смены компьютерных платформ.

Из наиболее наукоемких программных комплексов выделим CAE-комплексы для работ в области вычислительной гидроаэродинамики. В этой области в нашей стране сегодня присутствуют два наиболее крупных производителя – это московская компания «ТЕСИС», недавно отметившая свой 30-й юбилей, разрабатывающая программный комплекс «FlowVision», и Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики (РФЯЦ-ВНИИЭФ), разрабатывающий комплекс «Логос».

Наряду с названными присутствуют и другие разработчики, которые, ориентированы на научно-исследовательские, а не коммерческие работы. В качестве такой работы приведем пример разработки программного комплекса SINF, который создан на Физико-Механическом институте нашего вуза и также ориентирован на решение вычислительных задач аэрогидродинамики [34].

3.6. Передовой Цифровой инжиниринг как воплощение подходов Математического моделирования

Как мы уже писали, технологии Математического моделирования включают в себя совокупность из шести блоков, каждый из которых обладает своим уникальным назначением, и в своем единстве они создают ***универсальный инструмент исследования Природы и разработки любого класса машин, механизмов, разнообразных систем и технологий, основанный на математических соотношениях и законах и компьютерных технологиях***. В этом пункте нашего исследования мы попытаемся показать, как Цифровой инжиниринг формируется в ключевых отраслях инженерного знания на основе подходов Математического моделирования.

И начать мы должны с того, с чего, по сути дела, начали нашу работу в самом ее начале, а именно с того, что есть Математическое моделирование. А начали мы наше повествование с того, как издревле люди искали способы количественно описывать окружающий их мир – размеры его объектов, расстояния между ними, объемы и вес предметов и так далее. Именно на этом пути появились числа – цифры, источником которых могут быть все названные или какие-то иные измерения, либо математические соотношения. Но ведь если мы обратимся к определению инжиниринга, то первое, о чем должны сказать, это как раз и есть ***взгляд на окружающий мир с позиций системного знания, то есть науки***, где с момента её зарождения (начала описания чего-либо или какого-либо объекта) математика и её инструменты стояли во главе угла. Конечно, в ретроспективном взгляде это утверждение требует уточнения, которое подсказывает нам, что роль математики росла по мере развития и совершенствования её инструментария, о чем мы говорили в Разделе 2.

Таким образом, именно здесь, уже с самого начала первых попыток изучения Природы человек установил не просто связь, а естественную основу, связующую в самых простейших формах на первых этапах развития Цивилизации понятия Математическое моделирование и Цифровой инжиниринг, возникшие в будущем.

Напомним читателю, что вторым блоком в концепции Математического моделирования был сугубо математический блок – блок проблем математической корректности поставленной задачи.

Конечно, рассматриваемые здесь вопросы не являются прямо связанными с проблемами Цифрового инжиниринга, но они ***оказываются критически важными*** для получения верного результата, уникальный пример чего приведен нами для случая задачи оптимального проектирования. В этом примере рассмотрена пространственная периодическая задача Рэлея (см. параграф 2.5), в которой, как выяснилось, не существует «классического» кусочно-гладкого решения. Для решения задачи одному из авторов, Ю.Я. Болдыреву, пришлось провести ее переформулировку и использовать аппарат теории меры Лебега, и было это более 30 лет тому назад.

Следующие два блока концепции Математического моделирования связаны с вычислительными проблемами. И можно утверждать, что именно они дают основания называть рассматриваемый формат инжиниринга как Цифровой инжиниринг, поскольку прямо связаны с построением вычислительных процедур.

Совершенно аналогично обстоит дело и с двумя другими, последними блоками концепции Математического моделирования, которые обеспечивают численную реализацию рассматриваемой задачи на компьютере и, в конечном итоге, получение и анализ результатов.

При первичном анализе рассмотренного содержания Цифрового инжиниринга можно предположить, что изменения, которые были привнесены цифровыми технологиями в инжиниринг, носили технический характер и что они породили как расширение классов решаемых задач, так и невероятное ускорение в их решении. Однако все гораздо интересней и значительней, и о том, в чем состоит эта значительность, мы и расскажем далее, а пока отметим только то, что уже само расширение классов рассматриваемых задач далеко не техническая проблема.

Принципиальные технологические изменения/инновации, повлиявшие на совершенствование инжиниринга, или как Цифровой инжиниринг изменил существо инжиниринга

Важнейший вопрос – как математические методы и реализующие их вычислительные технологии и их внедрение в промышленность на основе компьютерных технологий повлияли на само существо инжиниринга? Очевидно, что повлияли, и повлияли очень сильно, но для нас представляет интерес качественная сторона этого влияния – улучшения, то есть в чем она, собственно, заключается. И этот фундаментальный вопрос как раз и находится в центре анализа тех принципиальных технологических изменений – инноваций, которые порождены тотальной заменой «классического» инжиниринга Цифровым инжинирингом. Эта замена проходила постепенно, начиная с 60-х – 80-х годов XX века, и мы определили это время как часть IV этапа и весь V этап в развитии инжиниринга.

И здесь мы сразу же можем утверждать, что существо качественного улучшения состояло в том, что исследователи и инженеры получили уникальный и одновременно универсальный инструмент как исследования Природы, так и её преобразования путем создания новой техники и новых технологий. Ранее, на протяжении нашей работы, мы говорили, что этот инструментарий основывается на Математическом моделировании и в части постановки как научных, так и инженерных задач опирается в основном на уравнения математической физики. И здесь, как мы утверждали, возникла непреодолимая «стена» необходимых объёмов вычислений.

Повторим еще раз, что именно создание вычислительных машин позволило «разрушить» непреодолимую прежде «стену» объема вычислений и перейти к решению немыслимых ранее математических задач. При этом под «немыслимыми» мы понимаем как постановку принципиально новых классов задач, разработку методов их численного решения, так и реализацию этих методов на вычислительных системах. Особо здесь необходимо указать на появление технологий визуализации результатов вычислений, которые позволили исследователям и инженерам буквально видеть изучаемые эффекты в Природе или то, как изменения конструкции изделий влияют на их характеристики.

Описанная цепочка процесса решения проблемы в подавляющем большинстве случаев кардинальным образом изменила сам исторически сложившийся подход к решению научных и инженерных задач. Специалисты предметники смогли сконцентрироваться исключительно на существе проблем, не отвлекаясь, в общем, на второстепенные для них вопросы о математических технологиях и проблемах их реализации на вычислительных системах. И это был революционный шаг.

При этом совершенно естественно, что переход к Цифровому инжинирингу позволил кардинальным образом ускорить как научно-исследовательские работы, так и процессы проектирования и инженерного анализа. При этом такое ускорение оказалось выросшим не на проценты или десятки процентов, а во многих случаях в разы. И обусловлено это тем, что принципиальным образом изменились сами процессы исследовательской и проектно-конструкторской деятельности.

Сама структура технологий математического моделирования привела к систематизации этой деятельности, разделив её на этапы, на каждом из которых к работам привлекаются специалисты, владеющие знаниями, например, в области вычислительной математики, или в области математической физики, или, наконец, в области компьютерных технологий. И это, повторимся, позволяет инженерам сосредоточиться на их предметной области, глубоко постигая как постановку задач, так и анализируя результаты её решения.

Развитие технологий и подходов Цифрового инжиниринга привели к очень большому расширению возможностей как ученых, так и инженеров, поскольку позволили, как уже неоднократно указывалось, перейти к совершенно новым классам задач, сами постановки которых были проблемными или вообще принципиально невозможными в предыдущие времена. Что мы вкладываем в эту мысль? В первую очередь, это относится к совершенно новым классам постановок задач, которые включают в себя названные ранее мультидисциплинарность, мультимасштабность и мультитехнологичность.

Действительно, современное знание законов Природы позволило нам ставить такие классы задач, которые способны весьма близко к реальности описывать явления Природы. Но сам факт технической реализации этой близости возможен только посредством цифровых технологий, а говоря точнее, вычислительных методов и компьютерных технологий! И, естественно, это невероятно расширяет возможности научного и инженерного сообщества.

Все предыдущие рассуждения раскрывают и то обстоятельство, почему «классический» инжиниринг преобразовался в Цифровой инжиниринг, и ответ здесь предельно прост. Цифровой инжиниринг в полной мере впитал в себя все подходы и методы Математического моделирования, которые во всех его возможностях можно было реализовать только после мощных прорывов в Вычислительной математике и после создания вычислительных машин.

Итак, мы, продолжая изложение идей предыдущих параграфов, обобщили все те подходы в части технологий и методов, которые привнес Цифровой инжиниринг в инженерное дело, преобразовав его коренным образом. И здесь можно было бы привести соображения о путях дальнейшего развития применения Математического моделирования как в научных исследованиях, так и в инженерном деле, но мы предоставим это тем, кто занимается научными прогнозами, сделав только одно замечание. Его смысл в том, что ***цифровые технологии, воплощенные в методологиях Математического моделирования и, как следствие, развившиеся в Цифровой инжиниринг, породили инструментарий, который дает возможность сколь угодно глубоко проникнуть в тайны Природы и создавать машины, системы и технологии, которые будут находиться в гармонии с ней.***

Подводя некоторый итог обсуждению роли и места цифровых технологий в современной экономике, сразу же укажем, что они активно развивались и продолжают развиваться не только в современной индустрии, но и практически во всех отраслях человеческой деятельности – от медицины, культуры, образования и сферы финансов до научных исследований и всех отраслей промышленности. В целом же, поистине безграничный круг приложений делает практически необозримым изучение и анализ всех прикладных программных средств, которые по своему существу отражают разные стороны их многообразия. Поэтому в рамках нашего краткого исследования мы, следуя рассмотрению тематики сферы материального производства, этой сферой и ограничимся.

Вместе с тем сделаем одно замечание, которое представляется авторам весьма важным. Речь пойдет уже о разработках отдельных образцов уникального программного обеспечения для решения уникальных же задач (уникальных на данный момент времени!). Приведем в связи с этим более чем характерный пример. Где-то в 2009–2010 годах наш коллега, так же, как и один из авторов, выпускник кафедры Гидроаэродинамики Физико-Механического факультета, профессор М.Х. Стрелец рассказал о решении его научной группой задачи о турбулентном обтекании тандема цилиндров. Здесь уместно отметить, что проблема как описания, так и моделирования турбулентности – одна из центральных проблем математики и механики XX века, о чем мы уже говорили ранее в разделе 2.

По своей физико-математической природе это проблема корректного математического моделирования движения вязкой жидкости или газа при сравнительно больших, примерно, 1000 числах Рейнольдса Re. Напомним, что оно вычисляется по формуле (2.8), имеющей вид: $Re= V\times L/\nu$, где L и V – характерные размеры области течения и его скорость, а ν – кинематическая вязкость жидкости [5]. Напомним также, что смысл числа Рейнольдса – во взаимоотношении сил вязкости и сил инерции в текущей среде.

Определенная теоретическая нерешенность проблемы турбулентности привела к потребности и необходимости в развитии численных методов её исследования. Здесь уместно отметить, что проблема турбулентности исключительно важна для самых различных приложений, и исторически её численное моделирование являлось одной из наиболее характерных и трудных задач применения высокопроизводительных вычислений (суперкомпьютерных технологий).

Профессор М.Х. Стрелец любезно предоставил авторам результаты моделирования в данной задаче (о турбулентном обтекании тандема цилиндров), которые, безусловно, принадлежали на момент их получения в 2010 году к числу уникальных не только в России, но и в мире[1]. Переходя к существу примера, напомним, что в принципиальном теоретическом плане проблема турбулентности в определенной степени считается решенной, поскольку турбулентные течения, как и ламинарные, описываются системой уравнений Навье–Стокса, о которых мы говорили в разделе 2.

Однако аналитическое решение этих уравнений в общем случае невозможно, а численное решение требует огромных вычислительных ресурсов из-за исключительно широкого пространственно-временного масштаба вихревых структур и хаотичности, присущих турбулентным течениям.

---

[1] Отметим, что рассматриваемая задача была одной из причин, на основе которых родилась идея создания Суперкомпьютерного центра «Политехнический», запущенного в начале 2015 г. в Санкт-Петербургском политехническом университете Петра Великого.

На рисунке 3.9 в качестве примера представлено мгновенное поле одной из характеристик течения при расчете поперечного обтекания тандема цилиндров при числе $Re=(V_0D)/\nu=1.4\cdot10^5$ (V_0 – скорость набегающего потока, D – диаметр цилиндра, ν – кинематическая вязкость жидкости).

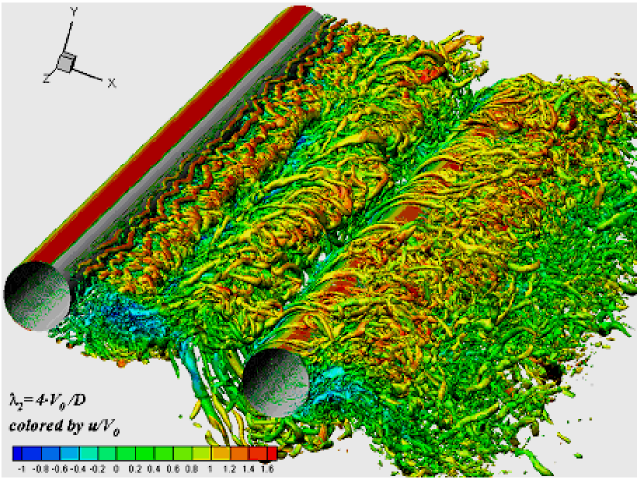

Рис. 3.9. Мгновенное поле обтекания тандема цилиндров

Этот расчет выполнен на сетке, содержащей примерно 60 миллионов узлов, с использованием специального метода моделирования течения с помощью так называемого метода отсоединенных вихрей на 8160 узлах суперкомпьютера «Intrepid» с Blue Gene/P архитектурой, принадлежащего Аргоннской национальной лаборатории США. Каждый из этих узлов построен на процессоре IBM PowerPC 450 (850 MHz) и имеет 2 Гб оперативной памяти, а коммуникация между узлами поддерживается сетью Blue Gene Network. При этом затраты машинного времени на расчеты некоторых вариантов составили до одиннадцати суток.

Примененная технология Математического моделирования с использованием осреднения по времени полученного нестационарного решения позволила с высокой точностью предсказать измеряемые в эксперименте параметры потока, например, распределение давления по поверхности цилиндров, на основе которого определяет силу сопротивления тандема.

Данный результат, напомним, что это 2009–2010 годы, ***являвшийся на тот момент уникальным в мировой практике вычислительной гидродинамики***, позволяет сделать такие важнейшие выводы.

Во-первых, он еще раз показывает справедливость утверждения о принципиальной познаваемости Природы на основе технологий Математического моделирования, о чем мы в той или иной форме и явно или неявно говорим на протяжении всего нашего исследования. И чем точнее наши модели, тем глубже мы продвигаемся в нашем познании.

Вторым важным фактором является то, что имеются весьма значительные классы уникальных задач, решение которых требует (на данном уровне развития математических методов и программных технологий) написания отдельных программ для их решения.

Третье. Приведенный только что пример показывает принципиальное стирание граней между сегодняшними инженерными проблемами и естественнонаучными задачами, поскольку передовое высокотехнологичное производство привлекает передовые же результаты естественнонаучных исследований.

И, наконец, ***четвертое***, то, о чем мы говорили выше в данном параграфе – мультидисциплинарность. Передовые CAE-системы сегодня, как правило, мультидисциплинарны, то есть они содержат в себе математические модели, описывающие ряд физических явлений, таких, например, как механика деформируемого твердого тела и аэрогидродинамика, или аэродинамика и тепломассобмен и так далее. Естественно, что такие программные комплексы позволяют решать более широкие классы задач и тем самым приближают нас ко все более корректному описанию реального физического мира, как при конструировании новых изделий, систем и технологий, так и при описании явлений Природы.

И ***последнее***, хотя и не менее значимое, чем все вышесказанное, – САЕ-программные системы являются базовыми для значительного числа критических технологий [35], и в настоящее время это обстоятельство является важнейшим для ускоренного высокотехнологического развития отраслей промышленности Российской Федерации. Перечень критических технологий утвержден Указом Президента Российской Федерации от 18 июня 2024 года №529.

Обсуждая представленные результаты, отметим, что внимательный читатель наверняка заметил приведенное в начале их изложения примечание о «данном моменте времени». И это крайне важное примечание, подчеркивающее, что уникальны как приведенные результаты, так и разработанное для их получения программное обеспечение. То есть ПО разработано под данную задачу! Таким образом, на момент ее рассмотрения не существовало универсального программного обеспечения для ее решения. Но нет и доли сомнения в том, что в сравнительно недалеком будущем такое ПО будет создано, как и необходимые для этого вычислительные мощности. При этом вполне очевидно, что такое программное обеспечение будет содержать все разработанные к тому моменту модели турбулентности или, как мы уже говорили в разделе 2, мы будем иметь такие вычислительные ресурсы, которые позволят нам решать уравнения Навье–Стокса на сетках и временных интервалах, позволяющих «разрешать» самые мелкие вихревые структуры.

А теперь остановимся на одном важном определении, которое прямо связано с рассматриваемыми нами вопросами и в некотором смысле объединяет вторую и третью главы нашей книги.

О понятии Цифрового двойника

По большому счету наша работа посвящена проблемам естественнонаучного знания и тем его аспектам, которые связывают фундаментальную науку с наукой прикладной. И здесь важной задачей видится оттачивание основных понятий-определений, которыми мы пользуемся и которые же предлагаем осмыслить и использовать нашим читателям.

Наша работа называется «Математическое моделирование и цифровой инжиниринг» и само это название указывает на связь фундаментального и прикладного знаний. По этой причине хотелось бы найти максимально емкое и краткое наименование этой связи, реализованное в конкретных объектах (изделиях). И здесь американским профессором Майклом Гривсом[1] совместно с экспертом НАСА Джоном Викерсом было найдено очень удачное наименование ***Цифровой двойник*** (**Digital Twin**) [36], которое не так давно появилось на технологическом горизонте и активно используется сегодня [37].

Само понятие Цифровой двойник является воплощением результатов применения математического моделирования к описанию характеристик объекта.

Согласно принятому в Российской Федерации национальному стандарту ГОСТ Р 57700.37–2021 «Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий. Общие положения»

[1] Майкл Гривс (Michael Grieves) – профессор, исполнительный директор / главный научный сотрудник Института цифровых двойников (Digital Twin Institute, США), ранее – профессор Технологического института Флориды (Florida Institute of Technology, США), эксперт NASA.

цифровой двойник изделия – это система, состоящая из цифровой модели изделия и двусторонних информационных связей с объектом (изделием) и (или) его составными частями.

Примечания:

1. Цифровой двойник разрабатывается и применяется на всех стадиях жизненного цикла изделия. Это предполагает, что можно рассматривать на всех стадиях (разработка, стадии производства и стадии эксплуатации) и на каждой из них получать Цифровой двойник соответствующего уровня.

2. При создании и применении цифрового двойника изделия участникам процессов жизненного цикла (по ГОСТ Р 56135) рекомендуется применять программно-технологическую платформу цифровых двойников.

В соответствии со стандартом ГОСТ Р 57700.37–2021 ***цифровая модель изделия*** определяется как система математических и компьютерных моделей[1], а также электронных документов изделия, описывающая структуру, функциональность и поведение вновь разрабатываемого или эксплуатируемого изделия на различных стадиях жизненного цикла, для которой на основании результатов цифровых и (или) иных испытаний по ГОСТ 16504 выполнена оценка соответствия предъявляемым к изделию требованиям. ***Двусторонние информационные связи***, в свою очередь, подразумевают двусторонний обмен данными и информацией между изделием и его Цифровым двойником.

[1] Под компьютерной моделью здесь понимается математическая модель, реализованная в какой-либо программной среде на некоторой вычислительной системе.

В основе цифровой модели и, соответственно, цифрового двойника лежит математическое моделирование, что отражено в представленных выше определениях. Напомним, что ***Математическое моделирование – процесс исследования (изучения) явлений Природы, любого класса (объектов) машин, механизмов, систем и технологий с помощью целостной, последовательной совокупности взаимосвязанных математических моделей и методов на основе компьютерных технологий, обеспечивающих полное и корректное решение проблемы описания объекта и определение его характеристик с требуемой точностью***.

Согласно А.А. Самарскому, Математическое моделирование предполагает определённую последовательность действий:

1. составление математической модели явления, процесса (постановка задачи);
2. анализ математической корректности построенной математической модели, описывающей задачу;
3. переход от непрерывной математической модели к модели дискретной (трансформация рассматриваемой задачи в численную форму);
4. анализ математической корректности вновь полученной дискретной задачи;
5. написание алгоритма для дискретной задачи (алгоритм реализации численного метода);
6. отладка программы, ее тестирование, получение результатов и их анализ (на основе алгоритма пишется программа).

Современные технологические достижения, о которых мы говорили выше в данной главе, дают возможность взаимоувязать все составляющие Цифрового двойника как в рамках одной стадии жизненного цикла, так и между стадиями, а также регулярно актуализировать данные об объекте (изделии) или процессе, что делает технологию Цифровых двойников наиболее востребованной и перспективной в различных секторах высокотехнологичной промышленности.

Определенный подобным, максимально общим образом, Цифровой двойник какого-либо объекта может иметь множество реализаций. Причем при каждой такой реализации обязано сохраняться единство итоговых характеристик объекта. Такие реализации могут быть получены на персональном компьютере или на суперкомпьютере, притом в разных программных средах, но результат (результаты) всегда должны быть одинаковы с требуемой расчетной точностью.

3.7. О подготовке нового поколения инженерных кадров

Все сказанное выше естественным образом приводит нас к проблеме подготовки новых поколений инженерных кадров[1], не просто знакомых со всем спектром новейших естественнонаучных и компьютерных технологий, но и умеющих их активно использовать в своей работе.

Ниже мы пытаемся наметить пути такой подготовки, опираясь на наш скромный опыт. Будем исходить из характера деятельности в области инжиниринга, то есть исходя из функционального содержания групп инженерных направлений (с учетом характера их будущей деятельности). Именно такой подход к деятельности инженеров всегда

[1] Сказанное, несомненно, относится и к подготовке кадров по другим научным направлениям, а также в медицине, сфере культуры и иных областях.

был основой подготовки инженеров в Политехническом институте (университете).

Приведем эти группы инженерных направлений:

- «инженеры по эксплуатации», характер работы которых – эксплуатация машин, систем и технологических линий;

- «инженеры-разработчики», ориентированные на проектирование и конструирование новой техники, на разработку новых технологий и на вопросы обеспечения их эффективной эксплуатации и функционирования;

- «инженеры-исследователи», ориентированные на разработку становящихся все более высокотехнологичными машин, систем и технологий.

Оценка количества выпускников в каждой из названных групп составляет примерно 15%, 70% и 15% от их общего количества соответственно. Но, как нам представляется, число последних будет непрерывно нарастать, и причина этого раскрывается далее.

Определив названные группы, попытаемся связать их деятельность с определенными выше инжинирингом и Цифровым инжинирингом. Прежде всего укажем на то, что все направления подготовки опираются на естественнонаучные знания, объем и глубина которых, конечно, варьируется от группы к группе.

При этом каждая из групп обладает своей серьезной спецификой, подчас уникальной и связанной с тем или иным видом научно-технической и инженерной деятельности. Вновь укажем, что в инженерной деятельности мы традиционно выделяем проектирование и инженерный анализ, поля деятельности инженеров-разработчиков и инженеров-исследователей, оставляя в стороне обширную деятельность инженеров по эксплуатации оборудования, вполне понимая необъятное поле создания соответствующих методов и технологий и программного обеспечения на их основе.

В связи с последним достаточно упомянуть одни только вопросы управления работой атомных электростанций, чтобы понять масштабы проблемы. При этом именно Цифровой инжиниринг является той основой, на которой реализуются сами технологии управления атомными электростанциями. Но вполне очевидно, что здесь Цифровой инжиниринг является кардинальным образом отличным от того, что доминирует в деятельности «инженеров-разработчиков» и «инженеров-исследователей». Здесь необходим глубокий и масштабный, охватывающий весь объект, интеллектуальный анализ ***функционирования*** объекта, то есть анализ его жизненного цикла и протекающих при этом процессов. Такой анализ должен опираться на множество источников данных об этом функционировании и, в согласии с этим, на математические модели прогнозирования поведения системы. И, конечно, такие модели сильно отличаются от тех математических моделей и методов, которые используются при разработке объектов или при научно-исследовательских работах в других высокотехнологичных отраслях.

Переходя к анализу содержания технологий Цифрового инжиниринга в областях деятельности «инженеров-разработчиков» и «инженеров-исследователей», мы можем сразу же утверждать, что эта деятельность ***максимально*** опирается на естественнонаучное знание[1].

[1] Конечно, деятельность инженеров по эксплуатации тоже в своей основе опирается на естественнонаучное знание, но при этом их работа, как правило, не порождает новое знание, а только контролирует применение известного знания.

При этом на протяжении всей нашей работы мы стараемся подчеркнуть, что различие между деятельностью «инженеров-разработчиков» и «инженеров-исследователей» непрерывно стирается.

Возьмем, например, авиастроение, где это выражается наиболее ярко. Проблема проектирования крыла самолета, особенно когда речь идет о высокоскоростных машинах, есть трудная мультидисциплинарная проблема. Она сочетает в себе проблемы прочности, аэродинамики, а при очень больших скоростях сюда добавляется и термодинамика. Таким образом, с позиций проектирования и инженерного анализа задача построения крыла с наилучшими характеристиками – максимумом подъёмной силы и минимумом сопротивления – сложнейшая научно-техническая задача. При этом если мы хотим создавать лучшие самолеты, то мы обязаны опираться на самые передовые математические модели в аэроупругости, механике турбулентности и термоаэроупругости. Но ведь эти модели – плод самых последних разработок научных групп в соответствующих отраслях, то есть результат работы именно исследователей и инженеров-исследователей того уровня, которых всегда готовили на Физико-Механическом факультете (институте) Политехнического института (университета).

Сказанное очевидным образом приводит нас к необходимости адаптации подготовки инженерных кадров в согласии с передовыми методами Цифрового инжиниринга. К этому весьма важному вопросу мы вернемся далее.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого с момента своего основания всегда был в авангарде подготовки кадров на основе фундаментальных начал инженерного образования. И здесь мы кратко попытаемся рассказать о нашем видении проблемы подготовки кадров с учетом передового опыта Политехнического университета. Учитывая масштабность вопроса для формирующейся Цифровой экономики, а так мы и должны рассматривать вопросы подготовки кадров в условиях экономики страны, ограничимся проблемами такой подготовки для цепочки CAD/CAE/CAM-технологий как наиболее наукоемкого звена всей цифровой производственной среды.

Начнем с того, что укажем на одно крайне важное обстоятельство, которое, как показывает наш опыт, является весьма серьезным препятствием в подготовке современного инженерного корпуса. Проблема заключается в том, что сегодня разработка практически любого высокотехнологичного изделия представляет собой, по сути дела, научно-исследовательскую работу того или иного масштаба. Как мы уже говорили на протяжения нашей работы, технические изделия и их элементы, разрабатываемые системы и технологии должны быть максимально приближенными в их описании к реальному физическому миру. То есть они должны описываться все более точными математическими моделями для максимального же приближения к физической реальности. И только на таком пути мы можем добиваться оптимизации характеристик продукции во всем её спектре, а значит и высокого качества изделий и их высокой конкурентоспособности на мировом рынке.

Но, как мы уже говорили, полномасштабное математическое моделирование любого, даже относительно простого, физического процесса требует, как правило, рассмотрения междисциплинарной постановки задачи математической физики. Вспомним упомянутый нами простейший пример моделирования горения газа в домашней горелке газовой плиты, который требует от нас описания течения газа, учета тепло- и массообмена, учета факторов излучения и, наконец, описания физикохимии процесса. Таким образом, уже в этом относительно простом случае мы имеем связанную междисциплинарную задачу математической физики. А отсюда следует, что инженер, работающий в сфере высокотехнологичных разработок, должен обладать компетенциями, которые присущи исследователю, т.е. он должен быть инженером-исследователем. Более того, сегодня мы наблюдаем проникновение подходов, основанных на математическом моделировании, практически во все сферы промышленности, включая те, которые не относили и не относим к высокотехнологичным, а значит востребованность инженеров-исследователей со временем будет непрерывно расти.

При этом именно в названной цепочке CAD/CAE/CAM-технологий, как мы уже знаем, содержится тот самый инструментарий, который, в формате CAE-технологий, позволяет описать физико-механические и иные процессы, дающие нам как характеристики объекта, так подходы к их улучшению – оптимизации. И именно здесь возникает совокупность проблем, которые требуют своего решения.

Во-первых, число инженерных специальностей, в программы которых входит изучение математической физики, крайне мало.

Во-вторых, точно также мало и число специальностей, на которых изучают хотя бы начала методов оптимизации, в основе которых лежит вариационное исчисление.

Третье, в высшей школе редко и в ограниченных масштабах изучают передовые программные CAE-системы.

И, наконец, ***четвертое***, возможно и самое главное. Это проблема самого преподавания естественных наук, физики и математики, часто недостаточно полного с точки зрения широты охвата, глубины, качества и т.п.

Теперь мы расскажем, как эти вопросы решаются в Политехническом университете. Чтобы быть предельно предметными, остановимся на рассмотрении обозначенных проблем для какой-либо массовой инженерной специальности. Выберем для примера направление подготовки «Прикладная механика» уровня бакалавриата (15.03.03) и магистратуры (15.04.03). Отметим также, что само направление «Прикладная механика» относится к укрупненной группе направлений подготовки (15.00.00) Машиностроение. В эту группу также входят:

(15.03.01) Машиностроение.

(15.03.02) Технологические машины и оборудование.

(15.03.04) Автоматизация технологических процессов и производств.

(15.03.05) Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств.

(15.03.06) Мехатроника и робототехника.

При этом принципиально важно понимать, что самому направлению (15.00.00) Машиностроение во всех его поднаправлениях подготовки присущи современные черты инновационного инженерного образования – фундаментальная физико-математическая подготовка, мультидисциплинарность и надотраслевой характер, широкое применение передовых технологий компьютерного (суперкомпьютерного) инжиниринга, позволяющих создавать в кратчайшие сроки конкурентоспособную и востребованную на глобальном рынке продукцию нового поколения.

Обратившись к тому, что является объектами профессиональной деятельности магистров направления (15.04.03) «Прикладная механика», как и других пяти поднаправлений магистерской подготовки направления (15.00.00) Машиностроение, то, в соответствии с образовательными стандартами СПбПУ, можно указать, что это:

- ***физико-механические процессы и явления***, машины, конструкции, композитные структуры, сооружения, установки, агрегаты, оборудование, приборы и аппаратура и многие другие объекты современной техники различных отраслей промышленности, топливно-энергетического комплекса, транспорта и строительства, для которых проблемы и задачи прикладной механики являются основными и актуальными и которые для своего изучения и решения требуют разработки и применения технологий математического моделирования на базе компьютерных (суперкомпьютерных) систем;

- ***технологии***: наукоемкие компьютерные (суперкомпьютерные) технологии на основе применения передовых CAD/CAE/CAM-технологий и интегрированных компьютерных технологий жизненного цикла изделий и продукции PLM-технологий (Product Lifecycle Management), информационно-коммуникационные технологии, расчетно-экспериментальные технологии, сочетающие в себе подходы математического и физического эксперимента, разработка сложных цифровых моделей материалов, процессов, систем на основе интеграции научных знаний и применения статистических методов обработки большого количества данных (Big Data), технологии виртуальной реальности, технологии быстрого прототипирования, передовые технологии производства (технологии создания композиционных материалов, технологии обработки металлов давлением и сварочного производства, технологии повышения износостойкости деталей машин и аппаратов), нанотехнологии.

При такой развернутой трактовке подготовки магистров направления «Прикладная механика» выпускники вузов, являющиеся «инженерами-исследователями» (а именно такие специалисты выпускались и выпускаются на Физико-Механическом факультете (институте)), востребованы широчайшим спектром отраслей промышленности от авиа- и автомобилестроения до электро- и энергомашиностроения. И эта востребованность основывается на непрерывно растущей потребности в кадрах с глубокой естественнонаучной подготовкой.

Подводя итог сказанному выше, мы убеждены, что проблема инженерного образования для цифрового будущего России в большой мере определяется состоянием и развитием фундаментального естественнонаучного образования в высшей технической школе.

3.8. Заключение к разделу 3

Основными направлениями рассмотрений этой главы являются ключевые составляющие Цифрового инжиниринга, то есть, по сути дела, достаточно широко развернутое содержание ряда блоков технологий Математического моделирования. И это в основном два последних блока, а именно V и VI блоки, которые не лишним будет напомнить:

V блок. Написание алгоритма для дискретной задачи, то есть последовательности вычислительных шагов и его перенос на компьютер – программирование.

VI блок. Отладка программы, то есть её тестирование, получение результатов и их анализ.

Итак, V блок, если говорить несколько упрощенно, посвящен вопросам программирования и компьютеров, а точнее компьютерных технологий, тогда как VI блок – вопросам реализации алгоритмов и программ при решении задач на компьютерах. Таким образом, вообще говоря, весь 3 раздел посвящен компьютерам и программированию – основополагающему инструментарию Цифрового инжиниринга.

Тематика создания и развития вычислительных систем или, как сегодня принято говорить, компьютеров – это отдельная и весьма увлекательная история, первым и главным «игроком» в которой была Германия, где выдающийся инженер Конрад Цузе (1910–1995 гг.) во время Второй мировой войны создал первую полноценную ЭЦВМ. В СССР активная работа по созданию ЭЦВМ началась немного позже. И здесь, отмечая невероятные успехи СССР, которых добилась страна, находясь в тяжелейших послевоенных условиях, в атомном и космическом проектах, отметим, что отсутствие условного компьютерного проекта в те же времена, необходимость которого понимали крупнейшие ученые, привело к серьезному отставанию страны в этой сфере.

В целом же в мировом технологическом пространстве с начала 50-х годов прошлого столетия ЭЦВМ, сначала не столь заметно, но затем во все ускоряющемся темпе начали внедряться в научную и инженерную практику. Таким образом, начиная с середины XX века набор инструментов для создания и реализации нового концептуального взгляда на изучение Природы с использованием ЭЦВМ окончательно сформировался. Последнее вовсе не означает, что на этом остановился процесс совершенствования самих инструментов фундаментального знания, и ЭЦВМ, так и сопутствующих компьютерных технологий, которые непрерывно развиваются и чему не будет конца, как и познанию человеком окружающего мира.

Мы рассказали, как проходило само становление понимания роли вычислений в решении сложнейших научных и инженерных задач в нашей стране. Причем концептуальное понимание все возрастающей роли вычислений и вычислителей – ЭЦВМ – было у ведущих отечественных ученых с самого начала их появления. Это и послужило основой для формулирования А.А. Самарским целостного взгляда на симбиоз: «Математика – Вычисления – ЭВМ/Компьютер», на основе которого и сформировалась Концепция Математического моделирования. Напомним, что сам Александр Андреевич говорил по началу о вычислительном эксперименте, называя его триадой:

«Модель – Алгоритм – Программа»

Рассматривая данный раздел в целом, мы можем утверждать, что он, с точки зрения содержания нашего исследования и его структуры, является ключевым, поскольку в нем описан основополагающий инструментарий, на котором построен практически весь спектр технологий, созданный нашей цивилизацией за последние примерно полвека. Конечно, и в начале промышленной революции вычисления, как технологическое ядро инженерных и естественных наук, были более чем значимы, но качественно новый характер они приобрели с началом внедрения ЭВМ в начале второй половины XX века, то есть примерно с 1960-х годов.

При этом непрерывно возрастало, если можно так выразиться, математическое существо рассматриваемых задач, иначе говоря, сложность поставленных и решенных задач. Мы особо акцентируем на этом внимание, подчеркивая сам фактор новых уровней постановок задач, несколько отделяя его от вычислений. И делаем это с целью особо подчеркнуть математическую и физико-механическую сторону проблемы решения любой из задач, будь то наука или инженерная практика [38].

Последнее обстоятельство крайне значимо, поскольку мы считаем особо важным подчеркнуть роль естественнонаучного начала, отделив его от сугубо технологического, связанного с проблемами реализации наших задач на ЭВМ. Действительно, математическая сторона любой проблемы, будь то вопросы существования решения задачи, его единственности и так далее, – ключевые и отдельные вопросы в рассмотрении этой проблемы. При этом, безусловно, крайне важны и вопросы прохождения задачи на ЭВМ, то есть вопросы программирования, представления данных при постановке задачи и форматы вывода результатов, включая их визуализацию, но это все же другая область знания. Таким образом, конечно, вопросы математические и технологические должны находится в определенной гармонии при разработке идеологии инструментария решения научных и инженерных задач на ЭЦВМ.

И, наконец, в завершении остановимся на часто возникающем у студентов, да и не только студентов, вопросе – а как **соотносятся Математическое моделирование и Цифровой инжиниринг**?

Следует отметить, что грань отличия между двумя рассматриваемыми нами концепциями не является достаточно четкой и фиксированной по той причине, что Цифровой инжиниринг является своего рода продолжением развития концепции Математического моделирования, его современной трактовкой. Важными «дополняющими» характеристиками Цифрового инжиниринга, отличающими его от Математического моделирования, являются, безусловно, прикладные черты этой концепции в промышленности (что объясняется особенностями самого инжиниринга), в то время как Математическое моделирование является универсальной концепцией и применимо для экономических, социологических, медицинских, культурологических и других объектов исследования. Вторым важным дополнением выступает расширение Цифрового инжиниринга технологиями, обеспечивающими анализ всех стадий жизненного цикла объекта. Конечно, Математическое моделирование может рассматривать как простые, так и сложные по своим характеристикам процессы, зависящие от стадии жизненного цикла, однако Цифровой инжиниринг является более сфокусированным на вопросах «стадийности».

Важно упомянуть и про то, что ***инжиниринг*** вообще, как вид творческой деятельности в предметной области инженерного дела, опирается в первую очередь на ***первый блок*** Концепции математического моделирования, а именно на ***постановку задач***, а это, как мы уже многократно говорили, математика и физико-механика. А говоря о ***Цифровом инжиниринге***, мы вовлекаем в рассмотрение не только первый-четвертый, но еще ***пятый и шестой блоки*** Концепции математического моделирования. При этом теперь в пятом блоке мы должны рассмотреть уже вторую «половинку» его составляющей, а именно ***программирование***, то есть написание программ на основе алгоритмов, тогда как шестой блок здесь присутствует в полном объеме.

Итак, основываясь на сказанном, мы можем сказать, что Математическое моделирование, распространяемое на все отрасли экономики, безусловно, более широкое понятие, чем Цифровой инжиниринг, применяемый в промышленности. При этом последний, вовлекаясь во все новые и новые отрасли индустрии, в свою очередь, способствует непрерывному расширению областей фундаментального знания и соответствующему расширению, развитию, совершенствованию концепции Математического моделирования в ее современной интерпретации.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя некоторый итог материалам нашей книги, отметим прежде всего то важнейшее обстоятельство, тот взгляд, которого придерживался коллектив авторов, работая над текстом. Он заключается в той естественной позиции, что все используемые понятия должны быть точно определены, исходя из опоры подготовки инженеров на современное фундаментальное естественнонаучное знание. Такой подход всегда был характерен для Политехнического института (ныне университета) с момента его основания, о чем мы говорили с самого начала. И этот подход мы использовали повсеместно в каждом из двух центральных, определяющих содержание книги разделов, как в разделе 2, посвященном собственно фундаментальной науке – описанию Концепции Математического моделирования, так и в разделе 3, повествующем о прикладном знании – Цифровом инжиниринге. Отметим при этом, что если в первом случае все основные понятия являются устоявшимися, то в случае Цифрового инжиниринга это не совсем так, и мы старались, по мере наших сил и нашего же понимания возникающих проблем, осветить имеющиеся здесь пробелы и вопросы, что порождало дискуссии авторов и долгие обсуждения, которые видятся весьма плодотворными.

Если кратко рассмотреть итоги раздела 2, то их можно в целом оценить как описание того фундамента, на котором строится Цифровая экономика (мы не оговорились, имеется ввиду именно Цифровая экономика – понятие гораздо более широкое, чем Цифровой инжиниринг). И это крайне важное обстоятельство, определяющее главные направления развития как естественных, так и прикладных наук, а также проблему подготовки инженерных кадров и ряда других направлений. Ядром, вокруг которого строится изложение, является ***Концепция Математического моделирования***, разработанная выдающимся советским и российским ученым академиком Александром Андреевичем Самарским. Учитывая её основополагающую значимость, мы излагаем эту концепцию достаточно подробно, сопровождая изложение характерными примерами. Этими примерами мы старались донести до читателя ***критическую важность сугубо математических факторов при решении многих задач***. Более того, на протяжении всей книги мы подчеркиваем, что непрерывно усложняющиеся математические модели окружающего нас мира Природы и всего, что создается человеком, требуют такого же возрастающего внимания ко всем аспектам постановки задач и их математической сущности. Особенно актуальным это является для все более набирающего масштабы направления анализа задач оптимизации, где подчас само существование решения является проблематичным, что мы и демонстрируем на важном практическом примере, восходящем к выдающемуся ученому лорду Рэлею.

Что же касается самой концепции Математического моделирования, то она включает в себя блоки, изложение которых естественным образом приводит нас к необходимости ретроспективного взгляда на обсуждаемые вопросы, что мы и старались делать по мере необходимости.

Здесь же необходимо указать и на то обстоятельство, что, прорабатывая так детально тему Математического моделирования, мы хотели показать читателю её определяющую значимость для научного знания, инженерных разработок и исследований. Причем для всех направлений научных и инженерных работ, сфер медицины, образования и культуры. Это принципиально важно для быстрого развития всех областей жизни общества и требует от всех направлений деятельности высшей школы учета непрерывно растущего обилия новых подходов как в постановках задач, так и в методах и технологиях их решения. И важнейшим выводом здесь является ***требование непрерывного роста фундаментального образования***.

Остановимся еще на одном вопросе, который часто возникает при изучении рассматриваемой в нашей работе тематики. А именно – в чем состоит существо связи совокупности процессов, объединяющих написание модели изучаемого явления или процесса, построения алгоритма и в итоге написания[1] программы для ЭВМ. Для ответа на этот вопрос нам вновь достаточно вспомнить триаду А.А. Самарского

Модель – Алгоритм – Программа.

Начнем с того, что в этой формуле под Моделью, конечно, подразумевается Математическая модель. Также напомним, что эта формула предшествовала предложенной позднее А.А. Самарским Концепции Математического моделирования.

А теперь поговорим о том, что же лежит в основе существа связи объединяющих приведенную триаду составляющих. А существо это отражает содержание самого процесса теоретического познания Природы и включает в себя такие очевидные этапы.

Во-первых, дабы получить какие-то оценки (характеристики) изучаемого явления или объекта, нужно иметь либо сам объект (как в физическом эксперименте), либо его некий образ, который способен дать нам искомые оценки и который называют моделью. И здесь возникает

[1] Мы, конечно, говорим о первых шагах внедрения ЭВМ, когда А.А. Самарский и предложил приведенную триаду.

центральный вопрос познания Природы, вопрос, волновавший, да и продолжающий волновать лучшие умы человечества, вопрос о самой познаваемости Природы – того мира, в котором мы живем. Здесь как раз и находится начало связи физического и теоретического эксперимента, при этом, как показывает история науки, они были в непрерывной связи с самых первых шагов развитии науки. Почему мы об этом говорим!? Потому, что само понятие математической модели первоначально исходило из физического эксперимента. Действительно, как определить скорость света или найти диаметр Земли – нужны простейшие формулы, на основе которых и получаем числа. А это, хотя и простейшие, но все же модели. Основываясь на таких первых простейших моделях-формулах, ученые строили более сложные модели. И. Кеплер нашел формулы законов движения планет, а это XVII век, немного позже Р. Гук и И. Ньютон построили закон Всемирного тяготения. И все эти законы уже являли собой полноценные математические модели сложнейших законов движения небесных тел – это было начало. И это был прорыв, поскольку речь шла уже не о делах земных, а делах небесных!

Конец XVII века – начало XVIII века были буквально временами начала взрывного развития математики, что способствовало невероятному, взрывному же характеру «написания» математических моделей явлений Природы и объектов деятельности человека.

И здесь мы переходим ко ***второму*** пункту триады, то есть должны поговорить уже об алгоритмах. Связано это с тем, что мы вынуждены перейти к проблеме численного решения задач для самого разного рода математических моделей, будь то алгебраические и трансцендентные или дифференциальные уравнения и так далее. И проблема численного решения задач появилась, как только модели стали относительно сложными и ответы на них нельзя было разрешить в виде формул.

Действительно, уже во времена, предшествующие временам Ньютона, ученые столкнулись с непреодолимыми трудностями даже при решении алгебраических уравнений. Со времени Тартальи и Кардано были известны формулы для корней уравнений вплоть до четвертого порядка, а вот с корнями уравнений общего вида пятого порядка и выше возникли непреодолимые проблемы. И здесь гений Ньютона раскрылся во всем его масштабе. Им был предложен численный метод определения корней алгебраических и трансцендентных уравнений, в дальнейшем получивший наименование «метод Ньютона». Этот метод, который также называют методом касательных, оказался чрезвычайно эффективным – достаточно сказать, что для получения 7–8 верных значащих цифр искомого корня нужно сделать 5–6 шагов в алгоритме метода. К описанию того, как он связан с математической моделью, сейчас и переходим. Мы определяем ***алгоритм*** как некоторую конечную совокупность заданных действий (операций) решения рассматриваемой задачи, или заранее неизвестное количество действий (операций) для методов последовательных приближений[1].

Поясним это на примере метода Ньютона. Пусть требуется найти корень уравнения $y=f(x)$, о котором известно, что он находится на промежутке $[a, b]$. Полагая, что требования применимости метода выполнены, исходя из них, выбираем начальное приближение x_0. Пусть это будет точка $x_0=b$. Приведем формулу метода Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) / f'(x_k), k=0,1,2,\ldots \quad x_0 \text{ – дано.}$$

[1] Где число действий (операций) определяется требованиями точности вычислений и заранее неизвестно.

Приведенные соотношения как раз и есть ***алгоритм*** метода Ньютона, причем с заранее неизвестным числом повторений формулы метода, число которых определяется требованиями точности вычисления корней. Данный простейший пример наглядно показывает связь математической модели, в данном случае в виде уравнения $y=f(x)$, собственно метода Ньютона его решения, и алгоритма метода, приведенного выше. В связи с последним примером укажем, что алгоритм присущ практически каждому численному методу. Вспомним рассмотренный нами пример вычисления интеграла (2.17) и формулу алгоритма его вычисления (2.18).

Теперь, когда нами построен или определен алгоритм решения нашей задачи, мы можем перейти к последней составляющей нашей триады, а именно к ***программе***. Мы уже довольно подробно говорили о проблематике программирования, истории его развития от написания программ «в кодах» до программных комплексов, ориентированных на тот или иной круг предметных областей. По этой причине мы ограничимся тем, что отметим: на основе построенного алгоритма выбирается какой-либо язык программирования либо та или иная среда программирования. И для полноты рассмотрения отсылаем уважаемого читателя к приведенному в разделе 3 примеру программы, написанной на основе алгоритма вычисления интеграла (2.17) и формулы алгоритма его вычисления (2.18).

Таким образом, приведенные выше пояснения подтверждают корректность рассмотрения математического моделирования как совокупности процессов, направленных на изучение объекта с помощью численных методов и реализацию современного подхода к цифровому инжинирингу.

Третий раздел посвящен нашему видению того, что представляет собой Цифровой инжиниринг. Начинается этот раздел с описания исторического пути становления и развития собственно инжиниринга (отсылаем читателя к таблице 4.1, приведенной далее). Все время его развития мы поделили на шесть условных этапов, каждый из которых обладает своей характерной спецификой. При этом к Цифровому инжинирингу мы отнесли три заключительных этапа:

IV этап, который по нашей шкале относится к 1950-м – 1960-м годам;

V этап, который начинается в 1970-е – 1980-е годы и протекает вплоть до конца XX века, то есть до времени ***формирования технологической основы Цифрового инжиниринга***, под которой мы понимаем время ***появления и развития ЭЦВМ и программного обеспечения***. Это время буквально «взрывного» ***вторжения математических методов на базе вычислительных машин в научную и инженерную практику*** и социальную сферу. Безусловно, совершенствование и преобразование цифрового инжиниринга неотрывно связано с развитием численных методов и увеличением потребности в инженерных расчетах для решения сложных мультидисциплинарных задач [39].

VI этап, который захватывает период с 2000-х годов по настоящее время. Этот период начался с формирования цепочки – триады CAD-, CAE-, CAM-технологий и становлению системы CALS-технологий, привел к формированию становления Цифрового инжиниринга и Цифровых производств, проложив дорогу Цифровой экономики.

К концу IV этапа уже практически сформировалось направление знаний, которое сегодня относят к Компьютерной математике. Именно в это время мировая научно-технологическая повестка пополнилась таким мощным инструментарием, как ***языки программирования***, положившим начало бурно развивающейся до сегодняшнего дня отрасли разработки программных систем и комплексов. А систематизация на компьютерной основе множества производственных цепочек породила ***Триаду CAD-, CAE-, CAM-технологий – наукоемкое ядро системы CALS-технологий***. Это примерно рубеж XX и XXI веков, что весьма символично, поскольку это время стало рубежом, на котором мировое технологическое пространство начало обретать совершенно новые черты – черты начала перехода в обозримом будущем к полностью автоматизированному производству.

Краткая характеристика этапов становления инжиниринга и его трансформации в Цифровой инжиниринг приведена в таблице ниже.

Таблица 4.1 Характеристики этапов развития инжиниринга

Этап	Хронологические рамки этапа	Характеристики этапа
0	2-е – 1-е тысячелетия до Р.Х.	• Изобретение колеса и рычага. • Египетские пирамиды, оросительные системы.
	Античность, начиная примерно с 5-ого века до нашей эры	• Архимед, Демокрит, Евклид и другие гении, которые создали как основы подходов к изучению и преобразованию Природы, так и заложили начала научной деятельности, положившей основы инженерной деятельности.
	XV–XVI века, Эпоха Возрождения	• Формула для решения кубического уравнения: Н. Тарталья, Д. Кардано. • Начала механики: Галилео Галилей. **Результаты**: заложены предпосылки инженерной деятельности.

Этап	Хронологические рамки этапа	Характеристики этапа
I	Конец XVII века – первая четверть XVIII века	• Первые формулы для инженерных расчетов: Р. Гук, Б. Паскаль и Х. Гюйгенс. Р. Декарт – декартовы координаты. • Появление сословия инженеров. • Создание первых сложных машин, включая работоспособную паровую машину и полноценные ткацкие станки. • Развитие фундаментальных естественных наук, в первую очередь математики и физико-механики. • Создание основ исчисления бесконечно малых: достижения И. Ньютона и Г. Лейбница. **Результаты**: заложены начала фундаментальных основ математического моделирования в виде математики и физико-механики.
II	Вторая четверть XVIII века – первая четверть XIX века	• Утверждение созданного И. Ньютоном и Г. Лейбницем исчисления бесконечно малых как фундамента количественного описания мира Природы и техники. • Формирование универсальности в деятельности ученых и инженеров. • Работы Л. Эйлера по уравнению движения идеальной жидкости и о продольном изгибе колонн, в которой приводится формула для критической нагрузки на колонну – одно из первых уравнений в частных производных, описывающих поведение упругого тела (упругой среды). • Ж.Л. Лагранж и его «Аналитическая механика». **Результаты**: построены основы для полномасштабного описания и изучения явлений Природы, основ создания машин, механизмов и иных объектов, с опорой на методы математического

Этап	Хронологические рамки этапа	Характеристики этапа
		моделирования в виде математики и физико-механики.
III	Вторая четверть XIX века – середина XX века	• Развитие глубокой специализации в инженерной деятельности, наряду с нарастающим влиянием фундаментального естественнонаучного знания на инжиниринг. • Становление методов инженерного анализа и проектирования, возрастание объемов вычислений – проблема «стены» объема вычислений. • Массовое внедрение новинок науки и техники. • Достижения Клода Навье – одного из создателей математической модели вязкой жидкости и газа – уравнений Навье–Стокса. • Ж.-Б. Фурье, его монография «Аналитическая теория тепла» и построение уравнения теплопроводности для твёрдого тела, создание им методов интегрирования твёрдого тела при различных краевых условиях, что во многих случаях позволяет свести уравнение в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. • Лорд Рэлей поставил и решил задачу о наилучшей форме профиля плоского подшипника скольжения с мало сжимаемой смазкой. Это была ***первая работа по оптимальному проектированию***! Поразительным является тот факт, что решением этой задачи Рэлей почти на полвека опередил движение инженерной мысли. **Результаты:** этот этап может быть охарактеризован как этап нарастающего влияния фундаментального естественнонаучного знания, в том числе влияния на полномасштабную и многоплановую инженерную деятельность, а также как время начала

Этап	Хронологические рамки этапа	Характеристики этапа
		систематического применения и развития численных методов.
IV	Конец 1940-х годов – 1960-е годы	• Появление электронных вычислительных машин, а в дальнейшем и суперЭВМ. • Развитие начал программирования, языков программирования и алгоритмических языков. • Масштабное становление математического и системного программного обеспечения компьютеров, создание основ для разработки первых программных систем. • Формирование концепции Математического моделирования А. А. Самарским. • Создание отечественного программного комплекса ЛИРА для расчёта пространственных стержневых систем и последующего семейства комплексов для расчёта строительных конструкций под руководством А.С. Городецкого для БЭСМ, а также ЭВМ «М-20» и «Минск-22», послуживших прообразом программных систем в области строительства. • Начало работ по формированию подходов к расчётно-теоретической поддержке сложных изделий. **Результаты:** основополагающим итогом является заложение технологической, преимущественно компьютерной, основы цифрового инжиниринга.
V	1970-е годы –2000-е годы	• Появление на мировом рынке первых программных систем и комплексов (например, ANSYS).

Этап	Хронологи-ческие рамки этапа	Характеристики этапа
		• Массовое появление на мировом рынке технологий компьютерного инжиниринга (CAE-систем). • Встраивание мультидисциплинарности, мультимасштабности, мультитехнологичности в решение инженерных задач. **Результаты**: начало и нарастающее развитие широкомасштабных работ по созданию и совершенствованию программных систем практически по всем направлениям естественнонаучного и инженерного анализа.
VI	2000-е годы – настоящее время	• Формирование цепочки – триады CAD-, CAE-, CAM-технологий. • Становление системы CALS-технологий. • Полномасштабное становление Цифрового инжиниринга. • Реализация технологий параллельного проектирования. • Появление полномасштабных Цифровых производств – Цифровых фабрик. • Формирование Цифровой экономики. **Результаты**: цифровой инжиниринг как деятельность масштабируется на множество отраслей и подтверждает эффективность применения для решения инженерных задач.

Источник: составлено авторами

В этом же разделе мы останавливаемся и на причинах отечественного отставания в сфере развития вычислительных машин при выдающихся успехах в фундаментальных науках и инженерных разработках. И, конечно, в нашей работе мы касаемся вопроса подготовки новых поколений инженерных кадров, отвечающих требованиям Цифрового инжиниринга. Подчеркнем, что этот вопрос является критически важным для нашей страны, и не только в части обретения технологического суверенитета и достижения технологического лидерства, но и в целом, для тотальной перестройки отечественной экономики на новейшие технологии.

Повторим ту мысль, которая уже высказывалась в связи с третьим разделом книги, – этот раздел является важнейшим с позиций понимания современного состояния передовых производственных технологий и той роли, которую оказывала и оказывает на него фундаментальная наука. Здесь мы старались показать роль ***Математики и Физико-механики***, реализуемых в виде методологии Цифрового инжиниринга в передовых технологиях современной индустрии.

Подчеркнем, что при этом весь ***программно-аппаратный инструментарий***, т.е. самые разнообразные вычислительные системы – от персональных компьютеров до суперкомпьютеров – в совокупности с бесчисленным программным инструментарием в самых разных его формах лишь позволяет нам ***реализовать методы Математического моделирования***. И если у читателя сформировалось, может быть, начальное понимание этого, то мы будем считать, что главная цель этой книги достигнута.

5 ВАЖНЕЙШИЕ ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ[1]

Алгоритм **–** некоторая конечная совокупность заданных действий (операций) решения рассматриваемой задачи. Вместе с тем понятие алгоритма может быть распространено и на методы последовательных приближений, где число действий (операций) заранее неизвестно и определяется требованиями точности вычислений.

Алгоритмический язык (см. Язык алгоритмический).

Арифметическое выражение **–** совокупность функций, переменных, чисел и знаков арифметических операций, в том числе разделённых круглыми скобками. Является простейшим математическим соотношением.

Данные **–** совокупность исходных и итоговых чисел, таблиц и графиков, необходимых для решения задачи и характеризующих результаты по итогам её решения. Также сюда можно отнести и совокупность команд – кодов программ решения задачи.

Инженерное дело **–** область квалифицированной предметной деятельности по использованию знаний в преобразовании мира Природы в интересах человека.

Инженерный анализ **–** важнейший этап в создании продукции, обеспечивающий расчетно-теоретическую поддержку определения её

[1] Приведенные в данном разделе термины и определения сформулированы преимущественно на основе опыта и компетенций одного из авторов профессора Болдырева Ю.Я., выпускника Физико-Механического факультета (1971 год) Политехнического института (сегодня университета). Этот опыт основан на более чем 50-летней практике решения задач в областях прикладной аэродинамики, вариационного исчисления и других классов задач.

характеристик и получение наилучших значений этих характеристик с помощью методов оптимизации.

Инжиниринг – вид наукоемкой инженерной деятельности, опирающийся на фундаментальные естественнонаучные знания и, как правило, требующий специальных знаний в какой-либо предметной области, а также включающий, в частности, оказание услуг в сфере высокотехнологичного производства в целях решения широкого круга инженерных проблем (задач).

Коды ЭЦВМ (см. команды ЭЦВМ) **–** инструкции, определяющие работу процессора ЭЦВМ и являющиеся внутренними командами ЭЦВМ, включающие в себя как арифметические и логические операции, так и команды, обеспечивающие связность функционирования блоков компьютера. Являются самым нижним уровнем, на котором можно писать программы.

Команды ЭЦВМ (см. коды ЭЦВМ).

Компьютер (см. ЭЦВМ).

Компьютерные технологии **–** совокупность технологий, обеспечивающих полномасштабное и эффективное использование ЭЦВМ в научно-технической и иной практической деятельности.

Компилятор **–** программная система-«переводчик» с алгоритмического языка или языка программирования на язык команд компьютера (в коды), обладающая некоторыми дополнительными функциями в сравнении с транслятором.

Логическое выражение **–** совокупность логических функций, переменных, чисел и знаков логических операций, в том числе разделённых круглыми скобками, которые могут принимать значения истинно или ложно. Является простейшим математическим соотношением, принимающим значения логических чисел «истинно» или «ложно».

***Математическая модель* –** целостная (единая) совокупность взаимосвязанных математических соотношений, обеспечивающих полное и корректное решение проблемы вычисления характеристик модели явления Природы, разработки моделей любого класса (объектов) машин, механизмов, систем и технологий с требуемой точностью. Содержание математической модели может меняться в зависимости от увеличения знаний о Природе. Каждая математическая модель строится на основе *математических соотношений, которые, в свою очередь, строятся на основе арифметических* и *логических выражений*.

***Математическое моделирование* –** процесс исследования (изучения) явлений Природы, любого класса (объектов) машин, механизмов, систем и технологий с помощью целостной, последовательной совокупности взаимосвязанных математических моделей и методов на основе компьютерных технологий, обеспечивающих полное и корректное решение проблемы описания объекта и определение его характеристик с требуемой точностью.

***Математическое соотношение* -** математический объект, дающий количественное (численное) значение чего либо, – это могут быть уравнения, неравенства, таблицы и графики. Уравнения могут быть дифференциальными, трансцендентными и алгебраическими.

К математическим соотношениям относим и логические выражения, итогом применения которых могут быть логические значения-числа «истина» или «ложь».

Мультидисциплинарность – математические технологии постановки задач, в которых рассматривается неограниченное число взаимосвязанных процессов различной физико-механической или иной природы. Наряду с понятием *мультидисциплинарности* исторически часто использовалось понятие *междисциплинарности*.

***Мультимасштабность* –** математические технологии постановки задач, в которых рассматриваются различные физико-механические или иные процессы в системах с различными характерными масштабами.

***Мультитехнологичность* –** процессы (как правило, производственные), в которых присутствуют существенно различные технологии.

***Операционная система* –** программная система, управляющая работой ЭЦВМ, обеспечивающая прохождение потоков программ, ввод и вывод данных, и работу ЭЦВМ в сетевом окружении.

***Оптимизация* –** совокупность математических методов для построения (разработки) объектов с наилучшими характеристиками. Исторически к оптимизации относится Вариационное исчисление и конечномерная параметрическая оптимизация.

Параллельное проектирование – возможность одновременно вносить изменения, корректировать процесс разработки изделия на всех этапах его создания вплоть до материального воплощения различными специалистами, задействованными в реализации проекта.

Параллельные вычислительные методы – математические технологии, позволяющие одновременно выполнять несколько вычислительных ветвей (блоков) одной задачи.

Передовые производственные технологии (ППТ) – совокупность новых и быстро развивающихся технологий, процессов, методов и материалов, используемых для производства востребованных на мировом рынке изделий, машин, систем и технологий, как правило, опирающихся на компьютерные технологии.

Программа для ЭЦВМ – запись алгоритма решения задачи (проблемы) на каком-либо языке программирования (алгоритмическом языке) либо на языке команд (кодов) компьютера. Программы подразделяют на системные и прикладные.

Программа системная – программа, обеспечивающая работу компьютера в части какой-либо его функции (ввод-вывод, прохождение потока программ, обеспечение работы в сети и т.д.).

Программа прикладная – программа, обеспечивающая решение какой-либо задачи (или группы задач) на компьютере.

Программный комплекс – универсальная прикладная программа для решения какого-либо класса инженерных, естественнонаучных или иных задач от их постановки до получения результатов в требуемой форме, например, в виде их визуализации. (См. также *программа прикладная*)

Программная система – системная или прикладная программа, ориентированная на решение какого-либо класса задач, будь то обеспечение работы компьютера или решение на нем прикладных задач. Часто понятие *программная система* отождествляют с понятием *программный комплекс*.

Программное обеспечение (ПО) – совокупность программ, обеспечивающих эффективное использование ресурсов компьютера с помощью системных программ и прохождение прикладных программ. Таким образом, ПО включает в себя совокупность как системных, так прикладных программ.

Проектирование **–** процедура, предшествующая этапу инженерного анализа и включающая в себя разработку планов, моделей и схем для создания объекта, системы или технологии.

Суперкомпьютер (см. СуперЭВМ) **–** класс сосредоточенных вычислительных систем, которые на данном отрезке времени имеют производительность на 3–4 порядка и более, чем массово распространенные компьютеры.

СуперЭВМ (см. Суперкомпьютер).

Стандартная программа **–** программа для решения классов типовых вычислительных и иных задач.

Транслятор **–** программная система-«переводчик» с алгоритмического языка или языка программирования на язык команд компьютера (в коды).

Триада А.А. Самарского: «Модель – Алгоритм – Программа» – предложенная А.А. Самарским первоначальная схема решения задач на ЭЦВМ, предшествовавшая разработанной им концепции *Математического моделирования.*

Численные методы **–** раздел Математики, в котором разрабатываются процедуры (методы) решения математических задач в числовой форме. В центре таких методов преимущественно находятся методы решения всех видов уравнений.

Цифровая модель – модель, соответствующая реализованной математической модели на вычислителе на основе *программы*, включающая в себя данные и описания объекта и его жизненного цикла в кодах вычислителя.

Цифровой инжиниринг – инжиниринг на основе математического моделирования объекта на базе компьютерных технологий, ориентированный на построение всего его жизненного цикла.

Цифровые технологии – совокупность (система) технологий, на основе которых математические модели явлений Природы, любого рода объектов, изделий, систем и технологий обрабатываются на Электронных Цифровых Вычислительных Машинах (ЭЦВМ), воплощаются в цифровые характеристики и данные, распространятся, хранятся и передаются в электронном виде с использованием сетей.

Цифровой двойник изделия[1] – система, состоящая из цифровой модели изделия, реального изделия и двусторонних информационных связей между ними и участниками процессов жизненного цикла.

Примечания.

1 ЦД проходит стадии в соответствии со стадиями жизненного цикла изделия.

2 Участники процессов жизненного цикла – по ГОСТ 56135–2014.

Цифровая модель изделия[2] – система математических и компьютерных моделей[3], а также электронных документов изделия, описывающая структуру, функциональность и поведение вновь разрабатываемого или эксплуатируемого изделия на различных стадиях жизненного цикла, для которой на основании результатов цифровых и

---

[1] Источник: ГОСТ Р 57700.37–2021 «Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий. Общие положения».

[2] Источник: ГОСТ Р 57700.37–2021 «Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий. Общие положения».

[3] Под компьютерной моделью здесь понимается математическая модель, реализованная в какой-либо программной среде на некоторой вычислительной системе.

(или) иных испытаний по ГОСТ 16504 выполнена оценка соответствия предъявляемым к изделию требованиям.

Электронная Цифровая Вычислительная Машина (ЭЦВМ, компьютер) (см. Компьютер)

Язык алгоритмический – специальный язык, близкий к обычному математическому языку, для формализованной записи алгоритма задачи, где ключевыми элементами являются арифметические и логические выражения, построенный на основе правил математической лингвистики.

Язык программирования **–** специальный язык, близкий к обычному математическому языку, для формализованной записи алгоритма задачи, где ключевыми элементами являются арифметические и логические выражения, свободный от правил математической лингвистики.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О методе конечных разностей и методах конечных элементов и конечных объемов

Руководствуясь нашим подходом, опирающимся как на ретроспективный анализ, так и на развитие от простого к сложному, начнем с численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Вернемся к той задаче, с которой мы начинали, а именно обратимся к случаю краевой задачи, рассмотренной в параграфе 2.5, связанной с обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \ x \in [a,b], \quad y(a) = A, \quad y(b) = B$$

Именно с этого относительно простого случая естественно начать рассмотрение истории развития методологии решения дифференциальных уравнений.

Вопросы, которые здесь возникали, исторически сводились к двум главным. Первый касался проблемы точности приближения уравнений с применением конечных разностей, а второй вопрос был связан с нахождением рациональных методов решения получаемой при аппроксимации исходного уравнения системы линейных алгебраических уравнений. Ответ на первый вопрос относительно прост, поскольку еще Ньютон занимался разложением функций в ряды, а также активно пользовался конечными разностями. Действительно, рассматривая такие разложения для решения *y(x)* в окрестности точки x_i

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \left.\frac{dy}{dx}\right|_i \Delta x + \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \ldots, \ y(x_{i-1}) = y(x_i) - \left.\frac{dy}{dx}\right|_i \Delta x + \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 - \ldots$$

легко найти оценки для рассмотренной аппроксимации производных (ниже $y(x_{i+1}) = y_i$, $y(x_i) = y_i$, $y(x_{i-1}) = y_{i-1}$)

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} + o(\Delta x^2), \quad \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2)$$

Совершенно аналогично для уравнения с частными производными (2.20) погрешность замены дифференциального уравнения разностным составляет величину $O(h^2)$ (при Δx=Δy=h). Таким образом, при шаге h, равном 0,01, величина погрешности при аппроксимации соответствующих уравнений составляет 0,0001. Конечно, для одних классов инженерных и научных задач этого достаточно, а для других мало! При этом с ростом технологического совершенства и нарастающим числом разработок множества новых изделий, систем и технологий, с началом XX века требования к точности в инженерных и научных расчетах непрерывно росли, как росла и сама сложность проводимых вычислений.

Обратимся, например, к такому обстоятельству – в рассмотренной нами наиболее «сложной» задаче Дирихле (2.20), (2.21), расчетная область в простейшем случае – прямоугольник или квадрат. Но а как быть в случае, если, например, стационарное распределение той же температуры нужно вычислять в треугольной, как на Рис.1, или в какой-то еще более сложной области!? Очевидно, что аккуратное построение прямоугольной сетки здесь принципиально невозможно.

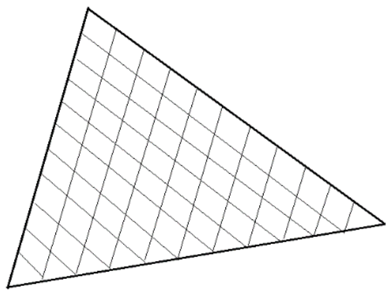

Рис. 1 Треугольная область вычислений

Можно привести еще одну проблему. Простейшая задача Дирихле (2.20), (2.21) для случая неоднородного материала, например, для нагретого тела, приводит нас к уравнению с переменными коэффициентами теплопроводности $k(x,y)$

$$div(k\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \text{ в } \Omega.$$

Построение конечно-разностной схемы в этом случае приводит к некоторым трудностям, которые чем больше колебания величины $k(x,y)$, тем выше приводят, в крайнем случае, при разрывных величинах $k(x,y)$ к серьезным проблемам при построении разностного аналога исходных уравнений. Как и каким путем их разрешать? Эти вопросы стали появляться перед вычислителями с началом XX века все чаще и чаще.

Таким образом, стала проявляться потребность построения разностных уравнений на основе другого принципа, отличного от прямой разностной записи исходных уравнений. И тут как теоретикам-математикам, так и инженерам-практикам необыкновенно повезло. И это «повезло» включало в себя следующие важнейшие сюжеты.

Во-первых, в 1908 г. швейцарский физик-теоретик Вальтер Ритц опубликовал работу, в которой предложил оригинальный метод решения задач Вариационного исчисления. Здесь мы должны сделать небольшое отступление, которое посвятим Вариационному исчислению [9], у истоков которого, как мы помним, стояли Эйлер и Лагранж.

Вообще, простейшая задача вариационного исчисления – это задача нахождения функции *y(x)*, которая, будучи достаточно гладкой (например, из класса C^1 [a,b] – класса непрерывных со своими первыми производными функций), сообщает минимум функционалу

$$J = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx \to \min, \quad y(a) = y_a,\ y(b) = y_b \tag{1}$$

Классическое Вариационное исчисление предполагало, что основная функция f дифференцируема по всем аргументам требуемое число раз. При этом дающая минимум функция $y(x)$ разыскивается как решение уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

краевые условия к которому содержатся в постановке задачи (1).

Возвращаясь к Ритцу, укажем, что суть его идеи заключалась в построении приближенного решения вариационной задачи (1) на основе выбора некоторой системы функций $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_N$, названных им координатными (часто говорят базисными), т.е.

$$y_N = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i,$$

где a_i – некоторые разыскиваемые числовые параметры; выделение φ_0, как правило, обусловлено необходимостью удовлетворить граничные условия в (1). Подставив y_N в функционал (1), получаем уравнения относительно разыскиваемых параметров a_i, памятуя о поиске минимума функционала J в (1):

$$\frac{\partial J(\varphi_1)}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial J(\varphi_2)}{\partial a_2} = 0, \ldots, \frac{\partial J(\varphi_N)}{\partial a_N} = 0.$$

Метод Ритца дал инструментарий для задач, неразрешимых до этого, особенно в прикладной сфере. Достаточного много времени потребовалось для строгого обоснования метода. Сам Ритц хорошо понимал необходимость этого и многое сделал в этом направлении, но его жизнь оказалась короткой – он умер в 31 год.

Во-вторых, это обстоятельство, связанное с высоким уровнем запросов инженеров-механиков, которые вели систематические расчеты практических конструкций, ферм, арок, балок и других задач строительной механики и теории упругости. Достаточно указать на то, что многие первые небоскребы Нью-Йорка и других мегаполисов мира были спроектированы и построены в первой трети XX века. Именно тогда Александр Павлович Хренников, русский инженер, эмигрант из России, предложил метод решения задач теории упругости, который позднее был назван методом конечных элементов (МКЭ). Первая его публикация на эту тему датирована 1941 г. Немного позднее, в 1943 г., выдающийся математик Рихард Курант, по сути дела предложил свою схему МКЭ. Обе эти схемы в дальнейшем были объединены и им придали завершенную математическую форму.

Соединение метода[1] Ритца и МКЭ позволило построить исключительно эффективный способ приближения уравнений в частных производных на сетках практически любой конфигурации (рис.1).

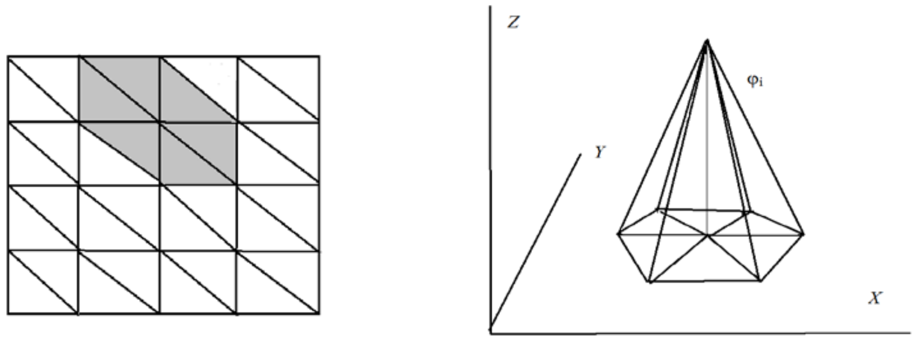

Рис. 2 К методу конечных элементов

Идея метода – в специальном выборе координатных функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N$. Характерный вид такой функции приведен справа на рис. 2. Главная особенность координатных функций в том, что они не равны

[1] Отметим, что далее мы рассмотрим и другой метод – метод Бубнова–Галёркина.

нулю в некоторой малой окрестности каждой расчетной точки. Последнее приводит к тому, что система итоговых алгебраических уравнений оказывается такой, что в каждой из расчетных точек связываются только соседние с ней, а матрица соответствующей системы оказывается имеющей большинство элементов равными нулю. МКЭ сыграл и, развиваясь, играет настолько важную роль в Вычислительной математике, что мы остановимся на его реализации несколько подробнее. Для этого выберем относительно простую краевую задачу, описывающую распространение тепла, – задачу Дирихле для уравнения Пуассона с переменным коэффициентом теплопроводности $k(x,y)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-f(x,y),\ \text{ в } \Omega \qquad (2)$$

полагая, что краевые условия на границе области $\partial\Omega$ таковы:

$$u|_{\partial\Omega}=0. \qquad (3)$$

Из Вариационного исчисления известно, что уравнение (2) есть уравнение Эйлера–Лагранжа [9] для следующего квадратичного функционала[1]

$$J(u)=\int_{\Omega}k[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2]-2\int_{\Omega}fu\,d\Omega$$

[1] Заметим, что для получения уравнения Эйлера–Лагранжа в Вариационном исчислении рассматривают первую вариацию функционала (4), при построении которой учитываются краевые условия (3).

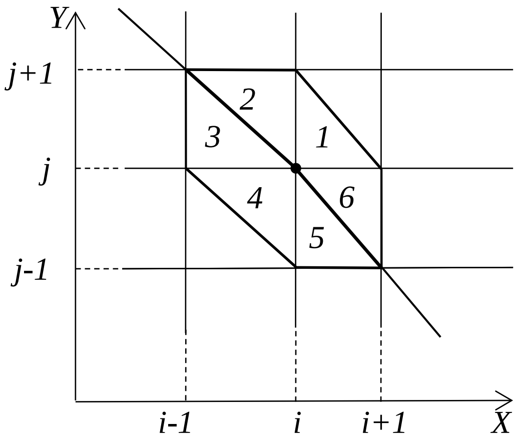

Рис. 3 Основание пирамиды

В согласии с идеей метода Ритца будем разыскивать минимум функционала на решении U_{NM} вида

$$U_{NM} = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} u_{ij}\varphi_{ij} \tag{4}$$

где u_{ij} – искомая табличная функция, а φ_{ij} – заданная координатная функция, при этом: $0 \le i \le N;\ 0 \le j \le M$, где параметры N и M отвечают максимальным числам шагов – разбиений по направлениям X и Y соответственно. Здесь крайне важно отметить, что рассматриваемые области произвольны по геометрии и могут быть разбиты не только на прямоугольные ячейки, как это изображено слева на рис. 2. Типичное разбиение области сложной формы приведено на рис. 4, где ячейки представляют собой криволинейные четырехугольники разного вида. В методе конечных элементов важнейшим моментом является способ выбора (задания) координатных функций φ_{ij}. Вид типичной геометрии такой функции, представляющей собой шестигранную пирамиду единичной высоты, приведен на рис. 2 справа (вид её основания – на рис. 3) и для каждой точки сетки (x_i, y_j) может быть представлен в виде:

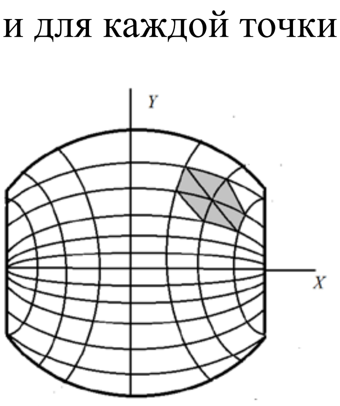

Рис. 4 Разбиение области

$$\varphi_{ij}^{k}(x,y) = 1 + a_{ij}^{k}(x - x_i) + b_{ij}^{k}(y - y_{ij}); \\ k = 1,2,...,6;\ i = 1,2,...,N-1;\ j = 1,2,...,M-1. \tag{5}$$

где a_{ij}^{k} и b_{ij}^{k} – угловые наклоны соответствующих плоскостей – граней пирамиды. Заметим, что в рассматриваемой задаче функции φ_{ij}^{k} строятся только в строго внутренних точках области Ω.

Если мы обозначим D_{ij} ту малую часть области Ω, в пределах которой функция φ_{ij} не равна нулю (рис. 3, 4.), причем $D_{ij} = \sum_{k=1}^{6} D_{ij}^k$ (где D_{ij}^k – площадь каждого из треугольников), то без труда сможем записать аналитические выражения для каждой из шести функций φ_{ij}^k, которые отождествляются с плоскостями пирамиды. Например, для $k=1$ и $k=2$ имеем:

$$\varphi_{ij}^1(x,y) = 1 - \frac{1}{\Delta_i x}(x - x_i) - \frac{1}{\Delta_j y}(y - y_j);\ \varphi_{ij}^2(x,y) = 1 - \frac{1}{\Delta_j y}(y - y_j).$$

Также укажем на то обстоятельство, что по своему существу приближение решения по формуле (4) производится кусочно-линейными функциями согласно (5).

Теперь, после того как построено выражение (4) для приближения U_{NM}, нам остается подставить его в функционал $J(u)$ и вновь, разыскивая его минимум, продифференцировать найденное выражение по всем параметрам u_{ij} $(1 \le i \le N-1;\ 1 \le j \le M-1)$[1]. Выпишем получаемую в итоге систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных u_{ij} в самом общем случае

$$\begin{aligned} &u_{ij}A_{ij}^1 + u_{i-1,j}A_{i-1,j}^2 + u_{i+1,j}A_{i+1,j}^3 + u_{i,j-1}A_{i,j-1}^4 + u_{i,j+1}A_{i,j+1}^5 + u_{i-1,j+1}A_{i-1,j+1}^6 + \\ &+u_{i+1,j-1}A_{i+1,j+1}^7 = F_{ij}^k;\ i = 1,2,3,...,N-1;\ j = 1,2,3,...,M-1. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь коэффициенты $A_{ij}^1, A_{i-1,j}^2, A_{i+1,j}^3, A_{i,j-1}^4, A_{i,j+1}^5, A_{i-1,j+1}^6, A_{i+1,j+1}^7$ и F_{ij} определяются на основе вычисления всех параметров сетки и коэффициентов $k(x,y)$. Важным обстоятельством является тот факт, что все вычисления «ведутся на треугольниках[2] D_{ij}^k» (рис. 3 и 4),

[1] Здесь мы учли, что на границе области вспомогательные функции φ_{ij} не строятся.
[2] Речь идет о вычислении поверхностных интегралов по каждой из областей D_{ij}^k.

составляющих основание описанной выше функции – пирамиды φ_{ij}^{k}. Укажем также на то обстоятельство, что построенная система линейных алгебраических уравнений в общем случае содержит все неизвестные, окружающие текущую неизвестную точку (x_i,y_j).

Будучи весьма эффективным, метод Ритца тем не менее имеет и ряд ограничений в своем применении, эти ограничения связаны со свойствами рассматриваемых дифференциальных уравнений, носят достаточно специальный характер, и здесь мы вынуждены отослать заинтересованного читателя к специальной литературе [29; 30].

Также к упомянутым книгам следует обратиться, если нас интересуют глубинные вопросы обоснования метода Ритца. Как мы уже говорили, сам Ритц, глубоко понимая важность этой работы, не успел её провести, и она была закончена примерно к середине века главным образом трудами Рихарда Куранта, Курта Фридрихса (1901–1982 гг.) (немецкий математик, эмигрировавший в США в 1937 г.) и нашего соотечественника академика Сергея Львовича Соболева (1908–1989 гг.).

Ограничения в применении метода Ритца требовали построения методов, которые содержали бы все преимущества способа построения итоговых сеточных уравнений вида (5), но были бы свободны от названных ограничений.

Перед самым началом Первой мировой войны, в 1913 году, русский математик, механик и кораблестроитель Иван Григорьевич Бубнов (1872–1919 гг.) написал рецензию на работы выдающегося механика С.П. Тимошенко, о котором мы уже говорили. Тимошенко, тогда еще российский ученый, применял метод Ритца к исследованию пластинок и балок. Иван Григорьевич отмечает в своем отзыве, что уравнения, к которым приводит метод Ритца, можно получить и более простым путем, т.е. не рассматривая вариационной задачи. Немного позднее подход Бубнова использовал Борис Григорьевич Галёркин (1871–1945 гг.), опубликовавший в 9 номере Вестника инженеров за 1915 г. статью, также посвященную стрежням и пластинкам. С тех пор за методом прочно закрепилось наименование «метод Бубнова–Галёркина». Заметим, что И.Г. Бубнов и Б.Г. Галёркин долгие годы преподавали в Петербургском Политехническом институте, Бубнов – с 1904 года, а Галёркин – с 1909 года.

Так в чем же основная идея подхода метода Бубнова–Галёркина!? Попытаемся ответить на этот вопрос в сжатом виде.

Выберем некоторую последовательность координатных функций φ_0, φ_1, $\varphi_2,\ldots$ $\varphi_n,\ldots$, может быть, в частности, и бесконечную. При этом полагаем, что все функции φ_n обладают требуемой гладкостью в области Ω с границей $\partial\Omega$. Будем рассматривать некоторую краевую задачу, которую запишем в абстрактном виде

$$Lu=f,$$

полагая, что условия на границе $\partial\Omega$ заданы. В полной аналогии с (4) выберем приближенное решение в виде

$$U_n=\sum_{i=0}^{n}u_i\varphi_i$$

где, как и ранее, параметры u_i ($0\leq i\leq n$) подлежат определению и, по сути дела, являются (в своей совокупности) приближением к решению u. По методу Бубнова–Галёркина величины u_i определяются из требований ортогональности разности (невязки) $Lu-f$ к базисным функциям φ_1, $\varphi_2,\ldots$, φ_n. Последнее обстоятельство послужило тому, что метод часто называют проекционным. Таким образом, метод приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно u_i

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \int_{\Omega} L\varphi_k \varphi_m d\Omega = \int_{\Omega} f \varphi_m d\Omega, \quad m = 0,1,...,n$$

Опуская подробное описание метода, отметим такие важнейшие обстоятельства: метод Бубнова–Галёркина имеет практически те же, что метод Ритца, алгоритмические особенности, что, в частности, выражается и в том, что сеточное разбиение, как и система координатных (базисных) функций, строится по такой же схеме, как и в методе Ритца.

Методы Ритца и Бубнова–Галёркина, будучи созданными в начале XX века, активно развивались, как в практическом, так и в теоретическом аспектах в продолжении длительного времени в течение всего XX века и активно продолжают развиваться и сегодня. И здесь мы вновь отсылаем заинтересованного читателя к специальной литературе [29; 30].

Большой интерес к методам Ритца и Бубнова–Галёркина на протяжении последнего столетия основан на том, что они, по своей математической природе, составляют ядро того, что сегодня называют методом конечных элементов (МКЭ) – уникального инструментария численного решения задач, связанных с дифференциальными уравнениями. Заметим, что бум в развитии этой методологии пришелся на 1960–1970-е годы, годы широкого внедрения вычислительных машин.

Вместе с тем применение МКЭ к решению задач гидрогазодинамики оставалось несколько проблематичным, в первую очередь в силу специфики жидкой или газовой среды, важнейшим свойством которых является текучесть. По этой причине в 1970-х годах стали формироваться методы, которые обладают свойством сохранения жидкости или газа в некотором непрерывно деформируемом подвижном объеме. При этом следует указать и на то обстоятельство, что к этому моменту активно формировались так называемые консервативные разностные методы, в которых также учитывались законы сохранения, в пределах, например, так называемого трехточечного шаблона: (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. Это направление развивалось, в первую очередь, научной школой А.А. Самарского.

Применительно к гидрогазодинамике методы, построенные на идее законов сохранения, стали называть методами конечных объемов (иногда контрольных объемов). Таким образом, можно утверждать, что в центре идеи метода находятся интегральные соотношения сохранения импульса, массы и т.д. В отличие от методов Ритца и Бубнова–Галёркина, где используется либо вариационный (в методе Ритца), либо проекционный принцип (в методе Бубнова–Галёркина), в методе конечных объемов в центре построений находится интегральная форма законов сохранения. К настоящему времени имеется несколько вариантов метода конечных объемов, формы которых определяются либо способом построения сетки, либо выбором опорных точек, в окрестности которых строится сам конечный объем. Таким образом, метод конечных объемов одной из центральных проблем содержит задачу приближенного вычисления интегралов. Речь идет как об объемном интеграле по всему выбранному объему с центром W, так и по всем боковым поверхностям, показанным на рис. 5. И здесь у метода конечных объемов есть один недостаток. Действительно, например, интеграл по поверхности (боковой грани Ω_A), отвечающей стороне с нормалью, исходящей из точки A, вычисляемый по простейшей квадратурной формуле, есть

$$\int_{\Omega_A} \boldsymbol{q}_A \boldsymbol{n} d\Omega_A \approx |\Omega_A|\, q_A^{cp}$$

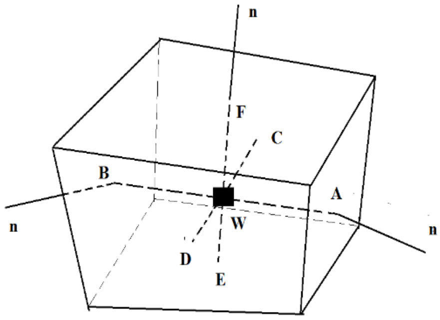

Рис. 5 Область вычислений

где $\boldsymbol{q}_A$ – поточное распределение некоторой величины по поверхности-грани Ω_A, а символом q_A^{cp} обозначено среднее значение модуля вектора $\boldsymbol{q}_A$. Порядок точности, который обеспечивает эта формула, – второй при условии, что вектор $\boldsymbol{q}_A$ вычисляется со второй степенью точности. Повышение же точности в вычислении интеграла требует от нас существенно больших вычислительных затрат и серьезно увеличивает сложность вычислительных формул [34].

Теперь кратко остановимся на очень важном аспекте решения дифференциальных уравнений, связанном с разрывными коэффициентами, о чем упоминалось выше. Эта проблема возникла уже во второй половине XIX века, когда Карл Вейерштрасс ввел в вариационное исчисление сильные вариации [9], отвечающие разрывам производных у искомых функций вариационной задачи и, как следствие, разрывам коэффициентов в уравнениях задачи. Насколько известно авторам, первый практически важный пример из этой области был изучен Рэлеем [12]. О решении этой задачи мы упоминали в разделах 2 и 3, говоря о пространственной вариационной задаче. Рэлей же исходно рассматривал одномерную вариационную задачу о максимуме подъемной силы тонкого жидкостного слоя за счет выбора вида его толщины h(x). Повторим приведенную в разделе 3 постановку этой одномерной задачи, с тем чтобы показать имеющиеся в самой постановке и в решении математические трудности:

$$\frac{d}{dx}(h^3\frac{dp}{dx}-h)=0, \quad p(0)=p(1)=0.$$

$$\text{При} \quad h \geq 1, \quad \text{найти} \quad \int_0^1 pdx \to sup$$

Здесь, как уже говорилось, уравнение второго порядка, носящее имя Рейнольдса, описывает поле давления $p(x)$ в тонком слое толщиной $h(x)$ (скольжение идет в направлении оси x). Найденное Рэлеем оптимальное решение $h(x)$ приведено на рис. 3.1 в разделе 3. Мы повторим его на рис. 6. Как видим, решение $p(x)$ является разрывным (при $0 \leq x < c$, $h(x)=h_0=1.812;$ при $c < x \leq 1$, $h(x)=1)$. Возникает вопрос, а как интегрировать уравнение для давления в этом случае!? Как обойти трудность, порожденную разрывностью $h(x)$ при непрерывной функции давления $p(x)$? Попутно заметим, что как здесь, так и в гораздо более трудных задачах имеется много фундаментальных вопросов, связанных с существованием решений уравнений в тех или иных классах функций, с их единственностью и т.д. Все эти вопросы были в центре внимания математиков практически на протяжении всего XX века, где российские математические школы, как уже говорилось, сделали очень много.

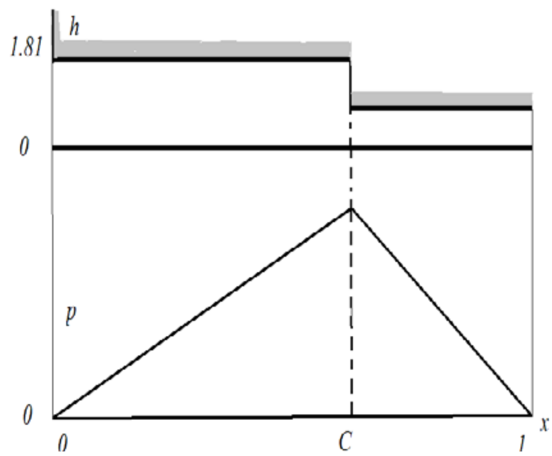

Рис.6 Решение задачи Рэлея

Возвращаясь к приведенному выше уравнению Рейнольдса, воспользуемся им, чтобы показать, как строятся разностные схемы для уравнений с разрывными коэффициентами. Заметим, что это уравнение есть уравнение неразрывности и отвечает постоянству расхода $q=h^3dp/dx-h$ на всем промежутке [0, 1]. Этим обстоятельством мы и воспользуемся при построении разностной схемы на всем сегменте [0, 1], который для простоты разделим на n равных шагов $\Delta=1/n$. Нетрудно видеть, что проблемной точкой в нашей задаче является точка c, которая должна входить в состав точек сетки $\{x_i\}_{i=0}^{i=n}$. Выберем так называемый трехточечный шаблон: (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) с центром x_i в точке c, т.е. $x_i= c$ и проинтегрируем уравнение на части этого промежутка $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{d}{dx}(h^3\frac{dp}{dx}-h)dx = q\Big|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} = q\Big|_{x_{i+1/2}} - q\Big|_{x_{i-1/2}} = \left(h^3\frac{dp}{dx}-h\right)\Bigg|_{x_{i+1/2}} - \left(h^3\frac{dp}{dx}-h\right)\Bigg|_{x_{i-1/2}} \quad (7)$$

Основываясь на этом уравнении и вспоминая, что в задаче Рэлея слева и справа от точки c функция $h(x)$ постоянна (слева от точки c $h(x)=h_0$, а справа $h(x)=1$), разностное уравнение относительно точки $x_i= c$ запишем в виде

$$-\frac{h_0^3}{\Delta}p_{i-1} - (\frac{1}{\Delta}-\frac{h_0^3}{\Delta})p_i + \frac{1}{\Delta}p_{i+1} = 1-h_0 \quad (8)$$

Таким образом, как не трудно видеть, главная особенность построения разностной схемы – аккуратное вычисление коэффициентов разностных уравнений в окрестности разрывов. Случай переменной функции $h(x)$ вблизи разрыва также не представляет особых трудностей. Здесь в уравнении (7) функции $h(x)$ требуется вычислять с учетом их переменности на соответствующих полуинтервалах $[x_{i-1}, x_i)$ и $(x_i, x_{i+1}]$. Можно выбрать, в частности,

$$\overline{h_{i+1/2}}=\frac{1}{\Delta}\int_{i}^{i+1} hdx,\ \overline{h^3_{i+1/2}}=\frac{1}{\Delta}\int_{i}^{i+1} h^3dx; \quad \overline{h_{i-1/2}}=\frac{1}{\Delta}\int_{i-1}^{i} hdx,\ \overline{h^3_{i-1/2}}=\frac{1}{\Delta}\int_{i-1}^{i} h^3dx$$

В таком случае аналогично уравнению (8) имеем в проблемной точке $x_i=c$ такое разностное уравнение

$$-\frac{\overline{h^3_{i-1/2}}}{\Delta}p_{i-1}-(\frac{\overline{h^3_{i+1/2}}}{\Delta}-\frac{\overline{h^3_{i-1/2}}}{\Delta})p_i+\frac{\overline{h^3_{i+1/2}}}{\Delta}p_{i+1}=\overline{h_{i+1/2}}-\overline{h_{i-1/2}}$$

Вновь подчеркнем, что вопросы построения аппроксимаций дифференциальных уравнений в случае разрывных коэффициентов активно разрабатывались отечественными школами Вычислительной математики, как для случая обыкновенных дифференциальных уравнений, так для случая уравнений с частными производными [29; 30].

В конце данного пункта отметим такой достаточно неочевидный факт. Рассматриваемые в начале пункта методы конечных разностей в 20-х и 30-х годах прошлого века активно использовались такими крупными математиками, как Курант и Фридрихс, для доказательства решений дифференциальных уравнений, а отечественный математик Л.А. Люстерник (1899–1981 гг.) использовал его при рассмотрении уравнения Лапласа еще в 1924 г.

СВЕДЕНИЯ
ОБ АВТОРАХ

Болдырев Юрий Яковлевич, доктор технических наук, профессор.

Профессор Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (СПбПУ), профессор Высшей школы передовых цифровых технологий Передовой инженерной школы СПбПУ «Цифровой инжиниринг», главного научного сотрудника Инжинирингового центра «Центр компьютерного инжиниринга» СПбПУ

В 1971 году окончил Физико-Механический факультет Ленинградского Политехнического института по специальности инженер-физик. С 1973 года занимал должности ассистента, доцента (с 1980 года) и профессора (с 1994 года). В 1976 году защитил **диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук, а в 1993 году на соискание ученой степени доктора технических наук по тематике Математическое моделирования в вариационных задачах, связанных с задачами прикладной аэродинамики,** стаж педагогической работы составляет более 52 лет. С 1993 по 2000 годы возглавлял Совет по научной работе студентов. В период с 2000 по 2014 год занимал пост директора Информационного комплекса Политехнического университета. С 2010 по 2013 год руководил, разработанным под его руководством, проектом по созданию Суперкомпьютерного центра «Политехнический».

Заслуженный работник высшей школы (1999 год), Премия Правительства Санкт-Петербурга за результаты в области Интеграции науки и образования (2009 год), Премия Национального Суперкомпьютерного Форума (2018 год), звание Почетного работника высшего образования (2023 год).

Является победителем Всероссийского конкурса «Золотые имена высшей школы» в номинации «За вклад в науку и высшее образование» в 2024 году. Входит в состав Ученого совета Передовой инженерной школы СПбПУ «Цифровой инжиниринг», в состав Научно-технической комиссии при Ученом совете ПИШ СПбПУ «Цифровой инжиниринг», является членом Государственной экзаменационной комиссии по направлению «Прикладная механика».

Основные области научных интересов включают **вариационное исчисление** и **оптимальное управление в механике**, **вычислительную математику**, **компьютерные и суперкомпьютерные технологии**, а также **цифровой инжиниринг**.

Является автором более **140** публикаций и учебных пособий, под его руководством защищено **8** кандидатских диссертаций, в настоящий момент руководит **2** аспирантами.

Щербина Людмила Александровна

Занимает должность заместителя директора по информационно-аналитической работе Инжинирингового центра «Центр компьютерного инжиниринга» СПбПУ, главного специалиста отдела технологического и промышленного форсайта Передовой инженерной школы СПбПУ «Цифровой инжиниринг».

Мартынец Екатерина Романовна

Занимает должность младшего научного сотрудника Инжинирингового центра «Центр компьютерного инжиниринга» СПбПУ, ведущего специалиста отдела технологического и промышленного форсайта Передовой инженерной школы СПбПУ «Цифровой инжиниринг».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ***Самарский А. А.*** Математическое моделирование и вычислительный эксперимент // Вестник АН СССР, 1979. – № 5. – С. 38–49.

2. ***Самарский А.А., Михайлов А.П.*** Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.

3. ***Болдырев Ю.Я.*** История и методология науки (на примере прикладной математики и механики: учеб. пособие / Ю. Я. Болдырев. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2019. – 217 с. – URL: https://assets.fea.ru/uploads/fea/news/2025/01/22/Болдырев_Ю_Я_История_и_методология_науки.pdf

4. ***Гиндикин С.Г.*** Рассказы о физиках и математиках. – М.: МЦНМО, 2013. – 491 с.

5. ***Лойцянский Л.Г.*** Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.

6. ***Бошкович Р. И.*** Теория натуральной философии / Р. И. Бошкович; [пер. с англ.]. – Chicago; London: Open Court Publishing Company, 1922. – 470 с.

7. ***Болдырев Ю.Я.*** Вариационные задачи теории газовой смазки: учеб. пособие / Ю. Я. Болдырев. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022. – 273 с. – URL: https://assets.fea.ru/uploads/fea/news/2025/01/22/Болдырев_Ю_Я_Вариационные_задачи_теории_газовой_смазки.pdf

8. ***Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Травин А.К., Шур М.Л.*** Современные подходы к моделированию турбулентности: учебное пособие. – СПб: Изд-во Политехн. ун- та, 2016. – 234 с.

9. ***Болдырев Ю.Я.*** Вариационное исчисление и методы оптимизации: учеб. пособие / Ю. Я. Болдырев. – 2-е изд., доп. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2024. – 283 с. – URL: https://assets.fea.ru/uploads/fea/news/2025/01/22/Болдырев_Ю_Я_Вариационное_исчисление_и_методы_оптимизации.pdf

10. ***Болдырев Ю.Я.*** Вариационная задача Рэлея теории газовой смазки. Малые числа сжимаемости // Известия РАН МЖГ, 2018. – № 4. – С. 23–31.

11. ***Самарский А.А.*** Численные методы. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.

12. ***Rayleigh L.*** Notes on the theory of lubrication // Phil. Mag., 1918. – V. 35. – №.1. – Pp. 1–12.

13. ***Maday C. J.*** A bounded variable approach to the optimum slider bearing / C. J. Maday // Проблемы трения и смазки. – М. : Мир, 1968. – № 3. – Пер. с англ. – Ориг. публ.: Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol. 1968. – V. 90, 1. – Pp. 240–242.

14. ***Лионс Ж.-Л.*** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.

15. ***Кац А.М.*** Теория упругости. 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 208 с.

16. ***Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.*** Параллельные вычисления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.

17. ***Гергель В.П., Фурсов В.А.*** Лекции по параллельным вычислениям. – Самара: Издательство СГАУ, 2009. – 163 с.

18. ***Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р.*** Молекулярная теория газов и жидкостей. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1961. – 929 с.

19. Высокотехнологичный компьютерный инжиниринг: обзор рынков и технологий / ***Абдулгариева Э.Р., Болдырев Ю.Я., Боровков А.И. [и др.]; научный редактор К.В. Дорофеев, руководитель группы В.Н. Княгинин.*** – СПб.: Изд-во Политехн. Ун-та, 2014. – 110 с. – URL: https://assets.fea.ru/uploads/files/2014_0101_SPbPU_high_tech_computer_aided_engineering_technologies_and_markets_overview.pdf

20. ***Ли К.*** Основы САПР CAD/CAM/CAE / Кунву Ли; [Пер. с англ.: А. Вахитов, Д. Солнышков]. – СПб. и др. : Питер, 2004. – 560 с. – URL: https://djvu.online/file/F5UYOvIf1avuI

21. История ПК ЛИРА, ЛИРА софт [Электронный ресурс]. – URL: https://lira-soft.com/pc_lira/history/

22. Ansys Announces Q4 and FY 2024 Financial Results [Электронный ресурс]. – URL: https://investors.ansys.com/news-releases/news-release-details/ansys-announces-q4-and-fy-2024-financial-results

23. Synopsys купит поставщика решений для инженерного анализа Ansys за $35 млрд [Электронный ресурс]. – URL: https://www.interfax.ru/world/940473

24. **CompMechLab®** – разработка и применение цифровых двойников (digital twin), цифровое проектирование, CAD/CAE/CAM/CAO/HPC технологии [Электронный ресурс]. – URL: https://fea.ru/

25. ***Болдырев Ю.Я.*** Суперкомпьютерные технологии как современное воплощение междисциплинарного подхода в научно-образовательной деятельности // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. – 2010. – № 4. – С. 99–106.

26. Болдырев Ю.Я. Суперкомпьютерные технологии и их приложения: учеб. пособие / ***Ю.Я. Болдырев, Е.П. Петухов; под ред. проф.***

Ю.Я. Болдырева. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – 92 с. – URL: https://assets.fea.ru/uploads/fea/news/2025/01/22/Болдырев_Ю_Я_Суперкомпьютерные_технологии.pdf

27. Компьютерный инжиниринг: учеб. пособие / ***А.И. Боровков [и др.].*** – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 93 с. – URL: https://fea.ru/spaw2/uploads/files/2012_Книги_СИО_и_КИ/2013_0101_НИУ%20СПбГПУ_Боровков А_И_и др__Компьютерный инжиниринг-2012.pdf

28. ***Болдырев Ю.Я.*** Суперкомпьютерные технологии в инженерном образовании // Труды международной конференции о сотрудничестве в инженерном образовании (ICEE 2012 Saint – Petersburg, 2-4 July 2012). – 2012. – С. 53–62.

29. ***Михлин С.Г.*** Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

30. ***Марчук Г.И.*** Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 454 с.

31. ***Самарский А.А.*** Современная прикладная математика и вычислительный эксперимент // Коммунист. – 1983. – № 18. – С. 31–42.

32. Научный подвиг длиною в жизнь. К 100-летию со дня рождения академика А.А. Самарского / ***Б.Н. Четверушкин, А.И. Аптекарев [и др.]*** // Mathematica Montisnigri. – 2019. – Vol XLIV. – С. 157–169.

33. Доклад академика А.А. Самарского на Президиуме АН СССР в 1984 году.

34. ***Смирнов Е.М., Зайцев Д.К.*** Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // Научно-технические ведомости СПбГПУ.

Проблемы турбулентности и вычислительная гидродинамика (к 70-летию кафедры «Гидроаэродинамика»). – 2004. – №2. – С. 1–22.

35. Указ Президента РФ от 18.06.2024 г. № 529 «Об утверждении приоритетных направлений научно-технологического развития и перечня важнейших наукоемких технологий» [Электронный ресурс]. – URL: http://www.kremlin.ru/acts/bank/50755

36. ***Grieves M.*** Virtually Perfect: Driving Innovative and Lean Products through Product Lifecycle Management. – Cocoa Beach (USA): Space Coast Press, 2011. – 370 p.

37. Цифровые двойники в высокотехнологичной промышленности : монография / ***под ред. А. И. Боровкова.*** – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022. – 492 с.

38. Как связаны математическое моделирование и цифровой инжиниринг / ***Ю.Я. Болдырев, В.А. Левенцов, Е.Р. Мартынец, Л.А. Щербина*** // V национальная научно-практическая конференция с международным участием «Цифровой инжиниринг и организация наукоемких производств», 2025. – С. 5–14.

39. ***Боровков А.И.*** Роль механики и передовых цифровых технологий в развитии высокотехнологичных отраслей промышленности // XIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике : Сборник тезисов докладов. В 4-х томах, Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 года. – Санкт-Петербург: СПбПУ, 2023. – С. 12–15.

Болдырев Юрий Яковлевич
Мартынец Екатерина Романовна
Щербина Людмила Александровна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЦИФРОВОЙ ИНЖИНИРИНГ

Учебное пособие

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать 17.10.2025. Формат 60×84/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 15,0. Тираж 60. Заказ 4635.

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами,
в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.